

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΛ
27-05-2010

ΘΕΜΑ Α

A1. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ.175

A2. α. → Λάθος

β. → Σωστό

γ. → Σωστό

δ. → Λάθος

A3.

α. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, με $g(x) \neq 0$

β. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, με $x > 0$

γ. $(e^x)' = e^x$

δ. $(\sin x)' = -\eta\mu x$

ΘΕΜΑ Β

B1. X: “ημέρες απουσίας από την εργασία”

$v = 50$ υπάλληλοι

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i v_i$
0	8	16	8	16	0
1	10	20	18	36	10
2	15	30	33	66	30
3	10	20	43	86	30
4	5	10	48	96	20
5	2	4	50	100	10
Αθροίσματα	50	100	-	-	100

Ο πίνακας συμπληρώθηκε ως εξής:

• $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 \Leftrightarrow v_3 = v - (v_1 + v_2 + v_4 + v_5 + v_6)$

$\Leftrightarrow v_3 = 50 - (8 + 10 + 10 + 5 + 2) \Leftrightarrow v_3 = 50 - 35 \Leftrightarrow \boxed{v_3 = 15}$

• $f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100\% \Leftrightarrow f_i\% = \frac{v_i \cdot 100\%}{50} \Leftrightarrow f_i\% = v_i \cdot 2\%$

Οπότε:

$f_1\% = v_1 \cdot 2\% = 8 \cdot 2\% = 16\%$

$f_2\% = v_2 \cdot 2\% = 10 \cdot 2\% = 20\% = f_4\%$

$f_3\% = v_3 \cdot 2\% = 15 \cdot 2\% = 30\%$

$f_5\% = v_5 \cdot 2\% = 5 \cdot 2\% = 10\%$

$f_6\% = v_6 \cdot 2\% = 2 \cdot 2\% = 4\%$

• $N_1 = v_1 = 8$

$$N_2 = N_1 + v_2 = 8 + 10 = 18$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 18 + 15 = 33$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 33 + 10 = 43$$

$$N_5 = N_4 + v_5 = 43 + 5 = 48$$

$$N_6 = N_5 + v_6 = 48 + 2 = 50$$

• $F_1\% = f_1\% = 16\%$

$$F_2\% = F_1\% + f_2\% = (16 + 20)\% = 36\%$$

$$F_3\% = F_2\% + f_3\% = (36 + 30)\% = 66\%$$

$$F_4\% = F_3\% + f_4\% = (66 + 20)\% = 86\%$$

$$F_5\% = F_4\% + f_5\% = (86 + 10)\% = 96\%$$

$$F_6\% = F_5\% + f_6\% = (96 + 4)\% = 100\%$$

• $x_1 v_1 = 0 \cdot 8 = 0$

$$x_2 v_2 = 1 \cdot 10 = 10$$

$$x_3 v_3 = 2 \cdot 15 = 30$$

$$x_4 v_4 = 3 \cdot 10 = 30$$

$$x_5 v_5 = 4 \cdot 5 = 20$$

$$x_6 v_6 = 5 \cdot 2 = 10$$

B2. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i v_i}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{100}{50} \Leftrightarrow \bar{x} = 2$ ημέρες

B3. $v=50$ άρτιος, οπότε: $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2}$ (1)

Οι παρατηρήσεις t_{25} και t_{26} αντιστοιχούν στην $N_3=33$ και αφού η $N_2=18$ ισχύει ότι $t_{19} = t_{20} = \dots = t_{25} = t_{26} = \dots = t_{33} = 2$

Άρα: (1) $\Leftrightarrow \delta = 2$ ημέρες

B4. $2 \leq X \leq 4$

• $v_3 + v_4 + v_5 = 15 + 10 + 5 = 30$ υπάλληλοι (ή $N_5 - N_2 = 48 - 18 = 30$)

• $f_3\% + f_4\% + f_5\% = (30 + 20 + 10)\% = 60\%$ (ή $F_5\% - F_2\% = (96 - 36)\% = 60\%$)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$

Το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή, αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{για } x \neq -1 \text{ και } x \neq 1 \text{ ισχύει: } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x+1} = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

$$\mathbf{F2.} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3} + \alpha) = \sqrt{1+3} + \alpha = \sqrt{4} + \alpha = \boxed{2 + \alpha}$$

$$\mathbf{F3.} \text{ Για να είναι η } f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1, \text{ πρέπει: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (1)$$

Από τα προηγούμενα ερωτήματα τα πλευρικά όρια είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 + \alpha$$

$$\text{Επίσης: } f(1) = \sqrt{1+3} + \alpha = 2 + \alpha$$

$$\text{Συνεπώς: } (1) \Leftrightarrow 2 + \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1 - 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -3}$$

$$\mathbf{F4.} \text{ Για } \alpha = -3 \text{ η συνάρτηση γίνεται: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}, & x < 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \sqrt{x+3} - 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 3}{0^2 - 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$f(6) = \sqrt{6+3} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$\text{Άρα: } A = 3f(0) + 2f(6) = 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 = -9$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\mathbf{\Delta 1.} f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} , με :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left(\frac{5}{2}x^2\right)' + (\alpha x)' + (\beta)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x + \alpha \cdot 1 + 0 = x^2 - 5x + \alpha$$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και είναι παραγωγίσιμη, από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει :

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 5 \cdot 2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 4 - 10 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 6}$$

Και αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, θα ισχύει :

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{5}{2} \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$$

Δ2.

Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$ έχουμε: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \text{ άρα } x_1 = 2, x_2 = 3$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	○	-	○	+

Οπότε:






- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και στο $[3, +\infty)$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, 3]$

Δ3.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
f(x)					

τ.μ.

τ.ε.

$$f'(2) = 0$$

Αφού: $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 2)$ } \Rightarrow η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $x_1 = 2$, το:

$f'(x) < 0$ στο $(2, 3)$ }

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 1 = \frac{8}{3} - 10 + 12 + 1 = \frac{8}{3} - 3 = \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \boxed{\frac{17}{3}}$$

$$f'(3) = 0$$

Αφού: $f'(x) < 0$ στο $(2, 3)$ } \Rightarrow η f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το:

$f'(x) > 0$ στο $(3, +\infty)$ }

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 9 - \frac{45}{2} + 18 + 1 = 28 - \frac{45}{2} = \boxed{\frac{11}{2}}$$

Δ4. $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \right) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 dx - \frac{5}{2} \int_1^2 x^2 dx + 6 \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 - \frac{5}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + [x]_1^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{5}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + 6 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + (2 - 1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{4} - \frac{35}{6} + 9 + 1 = \frac{5}{4} - \frac{35}{6} + 10 = \frac{15}{12} - \frac{70}{12} + \frac{120}{12} = \boxed{\frac{65}{12}}$$