ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
27-05-2004

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Απόδειξη σελ. 260 – 261

Β. Ορισμός σελ. 213

Γ. α $\rightarrow$ Σωστό

β $\rightarrow$ Σωστό

γ $\rightarrow$ Λάθος

δ $\rightarrow$ Λάθος

ε $\rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α. $f(x) = x^2 \ln x$

$D_f = \{x \in \Re : x > 0\} = (0, +\infty)$

Η f παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο βασικών παραγωγίσιμων.

$$f'(x) = \left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)' =$$

$$= 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{-\frac{1}{2}} \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f ' (x)		–	0	+	
f(x)		↘		↗	

$f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, f συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

$f'(x) > 0$ στο $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, f συνεχής στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$.

β. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$

Η f ' (x) παραγωγίζεται στο (0, +∞) ως γινόμενο παραγωγίσιμων με :

$$f''(x) = [x(2\ln x + 1)]' = (x)'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)'$$

$$= 2\ln x + 1 + x\left(\frac{2}{x} + 0\right) = 2\ln x + 1 + 2 = 2\ln x + 3$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln x \geq \ln e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \ln x \geq \ln\frac{1}{\sqrt{e^3}} \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} x \geq \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

X	0		$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		–	0	+	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

f συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right]$, $f''(x)<0$ **στο** $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$

άρα η f κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right]$

f συνεχής στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e^3}},+\infty\right)$, $f''(x)>0$ **στο** $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}},+\infty\right)$

άρα η f κυρτή στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e^3}},+\infty\right)$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

Παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$ **και το σημείο καμπής της είναι το** $A\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}},-\frac{3}{2e^3}\right)$, **αφού**

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)^2\ln\frac{1}{\sqrt{e^3}}=\frac{1}{e^3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2e^3}$$

γ. f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, **τότε το σύνολο τιμών της είναι το** $\left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right)$ **(1)**

Βρίσκω το:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\ln x \quad \left(\lim_{x\to 0} x^2=0,\ \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ \dfrac{1}{x^2},\ \ln x \text{ παραγωγίσιμες κοντά στο } 0\\ \left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=-\dfrac{2}{x^3}\neq 0 \text{ κοντά στο } 0\end{array}\right)$$

οπότε εφαρμόζω κανόνα de l' Hospital, άρα

$$(2)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2}=0$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}\qquad(3)$$

$$\text{άρα}\quad (1)=\left[-\frac{1}{2e},\,0\right)$$

f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, **τότε το**

σύνολο τιμών της είναι το $\left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ **(4)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\ln x=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\quad(5)$$

$$\left(\text{αφού }\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\right)$$

$$(4)\overset{(3),(5)}{\Rightarrow}\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)$$

Τελικά το σύνολο τιμών της f είναι το

$$\left[-\frac{1}{2e},\,0\right)\cup\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)=\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

α. Έστω $g(x) = e^x f(x)$

Η g είναι γινόμενο παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων άρα παραγωγίσιμη στο R . Οπότε και συνεχής στο R συνάρτηση.

Θεωρώ το διάστημα $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ και την συνάρτηση g που είναι

συνεχής στο $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

Παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=e^0 f(0)=1\cdot 0=0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}f\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}\cdot 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)=g\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την g(x) οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

$$g'(x)=\left(e^x f(x)\right)'=\left(e^x\right)' f(x)+e^x f'(x)=$$

Όμως $e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$

$$g'(\xi)=0 \Rightarrow e^{\xi}\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)=0 \text{ και αφού } e^{\xi}\neq 0$$

$$\text{έχω } f(\xi)+f'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=-f(\xi)$$

β. Αφού $f(x)=2x^2-3x$ και $g(x)=e^x f(x)$ έχω $g(x)=e^x(2x^2-3x)$

$$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} g(x)dx=\int_{\alpha}^{0} e^x\left(2x^2-3x\right)dx=\int_{\alpha}^{0}\left(e^x\right)'\left(2x^2-3x\right)dx=$$

$$\left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0} e^x\left(2x^2-3x\right)' dx=$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$$\left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0-\int_\alpha^0 e^x(4x-3)dx=$$

$$e^0\left(2\cdot 0^2-3\cdot 0\right)-e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right)-\int_\alpha^0\left(e^x\right)'(4x-3)dx=$$

$$-e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right)-\left\{\left[e^x(4x-3)\right]_\alpha^0-\int_\alpha^0 e^x(4x-3)'dx\right\}$$

$$=-e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right)-\left[e^x(4x-3)\right]_\alpha^0+\int_\alpha^0 e^x\cdot 4dx$$

$$=-e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right)-\left[e^0(4\cdot 0-3)-e^\alpha(4\alpha-3)\right]+4\int_\alpha^0 e^x dx$$

$$=-e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right)-\left(-3-4\alpha e^\alpha+3e^\alpha\right)+4\left[e^x\right]_\alpha^0$$

$$=-e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right)+3+4\alpha e^\alpha-3e^\alpha+4e^0-4e^\alpha$$

$$=-e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right)+3+4\alpha e^\alpha-3e^\alpha+4-4e^\alpha$$

$$=-2\alpha^2e^\alpha+3\alpha e^\alpha+4\alpha e^\alpha-7e^\alpha+7$$

$$=-2\alpha^2e^\alpha+7\alpha e^\alpha-7e^\alpha+7$$

$$=e^\alpha\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)+7$$

γ. $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(-2\alpha^2e^\alpha+7\alpha e^\alpha-7e^\alpha+7\right)$

Βρίσκω το :

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left(-2\alpha^2e^\alpha+7\alpha e^\alpha-7e^\alpha\right)=\lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^\alpha\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)\right]$$

όμως $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)=\lim\limits_{\alpha\to-\infty}-2\alpha^2=+\infty$

και $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} e^\alpha=0$. Άρα :

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^\alpha\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)\right]=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-2\alpha^2+7\alpha-7}{\frac{1}{e^\alpha}}=$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-2\alpha^2+7\alpha-7}{e^{-\alpha}}\qquad(1)$$

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{\alpha\to-\infty} e^{-\alpha} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty \\ \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} -2\alpha^2 = -\infty \\ -2\alpha^2+7\alpha-7,\ e^{-\alpha} \text{ παραγωγίσιμες στο } -\infty \\ \left(e^{-\alpha}\right)' = -e^{-\alpha} \neq 0 \text{ στο } -\infty \end{pmatrix}$$

εφαρμόζω κανόνα de l' Hospital, άρα :

$$(1) = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)'}{\left(e^{-\alpha}\right)'} = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4\alpha+7}{-e^{-\alpha}} \quad (2)$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}(-4\alpha+7) = +\infty \text{ και } \lim_{\alpha\to-\infty}\left(-e^{-\alpha}\right) = -\infty$$

Οι συναρτήσεις $-4\alpha+7,\ e^{-\alpha}$ **είναι παραγωγίσιμες, άρα εφαρμόζω κανόνα de l' Hospital, οπότε :**

$$(2) = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{(-4\alpha+7)'}{\left(-e^{-\alpha}\right)'} = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4}{e^{-\alpha}} = \lim_{\alpha\to-\infty} -4e^{\alpha} = 0$$

Δηλαδή $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} e^{\alpha}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right) = 0 \quad (3)$

Τότε:

$$\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to-\infty}\left(-2\alpha^2e^{\alpha}+7\alpha e^{\alpha}-7e^{\alpha}\right) + \lim_{\alpha\to-\infty} 7 \overset{(3)}{=} 0+7=7$$

<u>ΘΕΜΑ 4^{O}</u>

α. **Έστω** $g(x) = \int_1^{x^3} |z|\, f(t)\,dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$

f συνεχής στο $\Re$, $|z| \in \Re^*$, **άρα :**

$$\int_1^{x^3} |z|\, f(t)\,dt = |z|\int_1^{x^3} f(t)dt$$

Οπότε $g(x) = |z|\int_1^{x^3} f(t)dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

f(x) συνεχής στο $\Re$ συνάρτηση, οπότε έχει παράγουσα (αρχική) την $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, παραγωγίσιμη στο $\Re$.

Τότε $\int_1^{x^3} f(t)dt = F(x^3)$ παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων στο $\Re$ συναρτήσεων.

Επειδή $3\left|z+\frac{1}{z}\right| \in \Re^*$ και $(x-1)$ παραγωγίσιμη στο $\Re$, άρα $3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$ παραγωγίσιμη στο $\Re$.

Τελικά η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως διαφορά παραγωγίσιμων στο $\Re$ συναρτήσεων.

$$g'(x)=\left(\int_1^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\right)'$$

$$=\left(|z|\int_1^{x^3}f(t)dt\right)'-\left[3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\right]'$$

$$=|z|\left(\int_1^{x^3}f(t)dt\right)'-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)'$$

$$=|z|f(x^3)(x^3)'-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=|z|3x^2f(x^3)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

Άρα $g'(x)=|z|3x^2f(x^3)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$

β. Παρατηρώ ότι :

$$g(1)=|z|\int_1^1 f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(1-1)=0$$

οπότε η δοσμένη ανίσωση $g(x)\geq 0$ γράφεται $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in\Re$, δηλαδή η g παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, άρα παραγωγίσιμη και στο 1, εσωτερικό σημείο του $\Re$ και η g παρουσιάζει ακρότατο στο 1, οπότε ισχύει Θεώρημα Fermat, άρα g'(1) = 0 (1).

$$g'(x)=3|z|x^2 f(x^3)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

$$g'(1)=3|z|f(1)-3\left|z+\frac{1}{z}\right| \quad (\text{αφού } f(1)=1) \text{ έχω}$$

$$g'(1)=3|z|-3\left|z+\frac{1}{z}\right| \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow 3|z|-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0\Leftrightarrow |z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

γ. Από (β) ισχύει:

$$|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|\Leftrightarrow |z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2\Leftrightarrow z\bar{z}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}\Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)\Leftrightarrow z\bar{z}=z\bar{z}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{1}{z\bar{z}}\Leftrightarrow$$

$$0=\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{1}{z\bar{z}}\Leftrightarrow 0=\frac{\bar{z}^2+z^2+1}{z\bar{z}}\Leftrightarrow \overline{z^2}+z^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{Re}(z^2)+1=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$$

δ. Από το (γ) ερώτημα έχω $\mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$.

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Όμως $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$

άρα $Re(z^2) = \alpha^2 - \beta^2$.

Τελικά $\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$

όμως $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}\\ \alpha - \beta > 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha < 0$$

αφού $\alpha > 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση f και το [2, 3].

Η f είναι συνεχής στο $\Re$, άρα και στο [2, 3] και

f(2)f(3) = α·β < 0 (αφού α > 0, β < 0), άρα ισχύει θεώρημα Bolzano, οπότε υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.