ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ 28 ΜΑΪΟΥ 2005

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Σχολικό εγχειρίδιο σελ 151, απόδειξη 3
Β. (α) Σχολικό εγχειρίδιο σελ. 59
(β) Σχολικό εγχειρίδιο σελ 59.
Γ. (α) Σωστό
(β) Λάθος
(γ) Λάθος
(δ) Λάθος

ΘΕΜΑ 2

α.

[-)	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	$x_i\nu_i$
[4-8)	6	5	0,1	5	0,1	30
[8-12)	10	10	0,2	15	0,3	100
[12-16)	14	25	0,5	40	0,8	350
[16-20)	18	10	0,2	50	1	180
Σύνολο	-	50	1	-	-	$\Sigma x_i\nu_i=660$

$$x_1=\frac{4+8}{2}=\frac{12}{2}=6, \qquad x_2=\frac{8+12}{2}=\frac{20}{2}=10$$

$$x_3=\frac{12+16}{2}=\frac{28}{2}=14, \qquad x_4=\frac{16+20}{2}=\frac{36}{2}=18$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων βρίσκουμε τις ν_i, i=1, 2, …,4.

$\nu_1=5, \nu_2=10, \nu_3=25, \nu_4=10$

ισχύει: $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=5+10+25+10 \Leftrightarrow \boxed{\nu=50 \text{ μαθητές}}$

Τις σχετικές συχνότητες τις υπολογίζουμε από τον τύπο:

$f_i=\dfrac{\nu_i}{\nu}$, i=1, 2, 3, 4

οπότε:

$f_1=\dfrac{5}{50}=\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{f_1=0,1}$ $\quad f_2=\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \boxed{f_2=0,2}$

$f_3=\dfrac{25}{50}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{f_3=0,5}$ $\quad f_4=\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \boxed{f_4=0,2}$

$N_1=\nu_1 \Leftrightarrow \boxed{N_1=5}$

Για τις υπόλοιπες αθροιστικές συχνότητες εφαρμόζουμε τον τύπο:

$N_i=N_{i-1}+\nu_i$, i= 2, 3, 4.

οπότε:

$N_2=5+10 \Leftrightarrow \boxed{N_2=15}$

$N_3=15+25 \Leftrightarrow \boxed{N_3=40}$

$N_4=40+10 \Leftrightarrow \boxed{N_4=50}$

$F_1=f_1 \Leftrightarrow \boxed{F_1=0,1}$

Για τις υπόλοιπες αθροιστικές σχετικές συχνότητες εφαρμόζουμε τον τύπο: $F_i=F_{i-1}+f_i$, i=2, 3, 4.

οπότε:

$F_2 = 0,1 + 0,2 \Leftrightarrow \boxed{F_2 = 0,3}$

$F_3 = 0,3 + 0,5 \Leftrightarrow \boxed{F_3 = 0,8}$

$F_4 = 0,8 + 0,2 \Leftrightarrow \boxed{F_4 = 1}$

β. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \dfrac{660}{50} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = \dfrac{66}{5}} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 13,2}$.

γ. Οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στην κάθε κλάση, οπότε υπάρχουν τόσες παρατηρήσεις πριν την κεντρική τιμή όσες και μετά.

Αφού το 10 είναι η κεντρική τιμή της $2^{ης}$ κλάσης οι μαθητές που έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10 είναι:

$\nu_1 + \dfrac{\nu_2}{2} = 5 + \dfrac{10}{2} = 5 + 5 = \boxed{10 \text{ μαθητές}}$.

ΘΕΜΑ 3

i) $A \cup B$: το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α, Β. $P(A \cup B) = \dfrac{7}{8}$ (1).

ii) $P(B) \neq P(A \cap B)$ και $P(A), P(B) \in x = \left\{ \kappa, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4} \right\}$

$$k = \lim_{x \to 5} \frac{3x-15}{x^2 - 6x + 5}$$

α. $k=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{x^2-6x+5}$

$$\lim_{x\to 5}(3x-15)=3\cdot 5-15=0$$

$$\lim_{x\to 5}\left(x^2-6x+5\right)=5^2-6\cdot 5+5=25-30+5=0$$

θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x-15}{x^2-6x+5}$ με $A=\Re-\{1,\ 5\}$ τότε:

$$f(x)=\frac{3x-15}{x^2-6x+5}=\frac{3(x-5)}{(x-1)(x-5)}=\frac{3}{x-1}$$

$$k=\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{x-1}=\frac{3}{5-1}\Leftrightarrow \boxed{k=\frac{3}{4}}$$

β. $X=\left\{\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{4}\right\}$

$P(B)\in X$ και $P(A\cap B)\in X$ με $P(B)\neq P(A\cap B)$

- Το $\dfrac{5}{4}>1$ άρα αποκλείεται να είναι κάποια από τις πιθανότητες που ψάχνουμε, αφού πρέπει $0\le P(B)\le 1$, $0\le P(A\cap B)\le 1$.
- Ισχύει ότι: $\left.\begin{array}{r} A\cap B\subseteq B,\text{ άρα } P(A\cap B)\le P(B) \\ \text{όμως: } P(A\cap B)\neq P(B)\text{ από υπόθεση}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} P(A\cap B)<P(B) \\ \text{και } \dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\boxed{P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}}\ (2) \\ \boxed{P(B)=\dfrac{3}{4}}\ (3)\end{array}$$

γ. (1) Ισχύει ο προσθετικός νόμος, οπότε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)\overset{(1),(2),(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$P(A)=\frac{7}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{7}{8}+\frac{4}{8}-\frac{6}{8}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(A)=\frac{5}{8}}\ (4).$$

(2) Α - Β: το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το Α ισχύει ο κανόνας:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\overset{(2),(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$P(A-B)=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(A-B)=\frac{5}{8}-\frac{4}{8}\Leftrightarrow\boxed{P(A-B)=\frac{1}{8}}.$$

ΘΕΜΑ 4

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$$

α. $$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

$$f(1)=\frac{1}{1}=1$$

1ος τρόπος :

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Λ(1, 1) θα είναι:

$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \Leftrightarrow$

$y - 1 = -1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow$

$y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow$

$y = -x + 2$

2ος τρόπος :

Έστω ότι η εφαπτομένη της C_f στο Λ(1, 1) έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Ισχύει ότι:

$\alpha = f'(1) \Leftrightarrow \alpha = -1$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται: $y = -x + \beta$ (1)

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Λ(1, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$ (2)

Άρα από τις (1), (2) προκύπτει τελικά ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Λ(1, 1) είναι η:

$y = -x + 2$

β. $(OA) = x$ και $(OB) = y$, με $x, y > 0$

Η περίμετρος θα είναι:

$$\Pi = 2\left[(OA)+(OB)\right] = 2(x+y) = 2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Δηλαδή : $\Pi(x) = 2\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$

$$\Pi'(x) = \left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]' = 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2-1=0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 1$$

$$\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) > 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2-1>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\Pi'(x)$	$-$	0	$+$
$\Pi(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

ελάχιστο

$\Pi'(1) = 0$, $\Pi'(x) < 0$ για $x \in (0, 1)$ και $\Pi'(x) > 0$ για $x \in (1, +\infty)$

άρα η $\Pi(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $\Pi(1)$.

Αφού $x = 1$, τότε $y = \frac{1}{1} = 1$

άρα $\boxed{M(1, 1)}$.

γ. Έστω $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ... , $M_5(x_5, y_5)$, τα πέντε διαφορετικά σημεία της ευθείας $y = -x + 2$.

Η μέση τιμή των τετμημένων x_1, x_2, ..., x_5 είναι $\overline{x} = 5$ και η τυπική απόκλιση $s_x = 2$.

Παρατηρώ ότι οι τεταγμένες έχουν τη μορφή :

$y_i = -x_i + 2$, i=1, 2, ..., 5

- Αρχικά, δηλαδή όλες οι παρατηρήσεις x_i πολλαπλασιάζονται με (-1), οπότε βάσει της εφαρμογής, η νέα μέση τιμή πολλαπλασιάζεται επί (-1) και γίνεται $(-1)\cdot\overline{x} = -5$, ενώ η τυπική τους απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί $|-1| = 1$ και γίνεται $|-1|\cdot s_x = 2$.

- Εν συνεχεία, οι ήδη πολλαπλασιασμένες παρατηρήσεις αυξάνονται όλες κατά 2.

Οπότε, πάλι βάσει της εφαρμογής, η νέα μέση τιμή τους αυξάνεται κατά 2 και γίνεται :

$\overline{y} = -5 + 2 \Leftrightarrow \boxed{\overline{y} = -3}$

ενώ η τυπική τους απόκλιση παραμένει σταθερή, δηλαδή :

$\boxed{s_y = 2}$