Λύσεις Θεμάτων Μαθηματικών
Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
27/05/2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.
Σχολικό βιβλίο σελ.253

Α2.
Σχολικό βιβλίο σελ.273

Β.
α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(x) = 2 + (x-2)^2 \quad , \quad x \geq 2$

α' τρόπος : Η f παραγωγίζεται στο $[2, +\infty)$
ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = \left[2 + (x-2)^2\right]' = 2(x-2)(x-2)' = 2(x-2)$$

Ισχύει : $f'(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$
f συνεχής στο $[2, +\infty)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$,
άρα η f είναι 1-1.

β' τρόπος : Έστω $x_1,\ x_2 \in [2,\ +\infty)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$

$x_1 - 2 \neq x_2 - 2$ (με $x_1 - 2 \geq 0$, $x_2 - 2 \geq 0$) $\Rightarrow$

$(x_1 - 2)^2 \neq (x_2 - 2)^2 \Rightarrow$

$2 + (x_1 - 2)^2 \neq 2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow$

$f(x_1) \neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1-1

β. Αφού η f είναι 1-1 αντιστρέφεται.

Βρίσκω τον τύπο της f^{-1}.

$$\left.\begin{matrix} y = 2 + (x-2)^2 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y - 2 = (x-2)^2 \\ x \geq 2 \\ y - 2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x - 2 = \pm\sqrt{y-2} \\ x - 2 \geq 0 \\ y \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x - 2 = \sqrt{y-2} \\ y \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 2 + \sqrt{y-2} \\ y \geq 2 \end{matrix}$$

άρα $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-2}$, $y \geq 2$

ή για λόγους συμβολισμού

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$

γ. i. Βρίσκω τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την y = x, λύνοντας το σύστημα :

$$\left.\begin{matrix} y = x \\ y = f(x) \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = x \\ y = 2 + (x-2)^2 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = x \\ x = 2 + (x-2)^2 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y = x \\ (x-2)^2 - (x-2) = 0 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = x \\ (x-2)(x-2-1) = 0 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y=x \\ (x-2)(x-3)=0 \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=2 \;\; ή \;\; x=3 \\ y=2 \;\; ή \;\; y=3 \end{array}$$

άρα τα κοινά σημεία είναι τα A(2, 2) και B(3, 3).

Βρίσκω τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την y = x, λύνοντας το σύστημα :

$$\left.\begin{array}{c} y=x \\ y=f^{-1}(x) \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x \\ y=2+\sqrt{x-2} \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x \\ x=2+\sqrt{x-2} \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y=x \\ x-2=\sqrt{x-2} \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x \\ (x-2)^2=x-2 \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y=x \\ (x-2)^2-(x-2)=0 \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x \\ (x-2)(x-3)=0 \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=2 \;\; ή \;\; x=3 \\ y=2 \;\; ή \;\; y=3 \end{array}$$

άρα τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$ και C_g είναι πάλι τα A(2, 2) και B(3, 3).

γ. ii. Βρίσκω τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$ λύνοντας το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{c} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ y=2+\sqrt{x-2} \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ 2+(x-2)^2=2+\sqrt{x-2} \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ (x-2)^2=\sqrt{x-2} \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ (x-2)^4=x-2 \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ (x-2)^4-(x-2)=0 \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ (x-2)\left[(x-2)^3-1\right]=0 \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

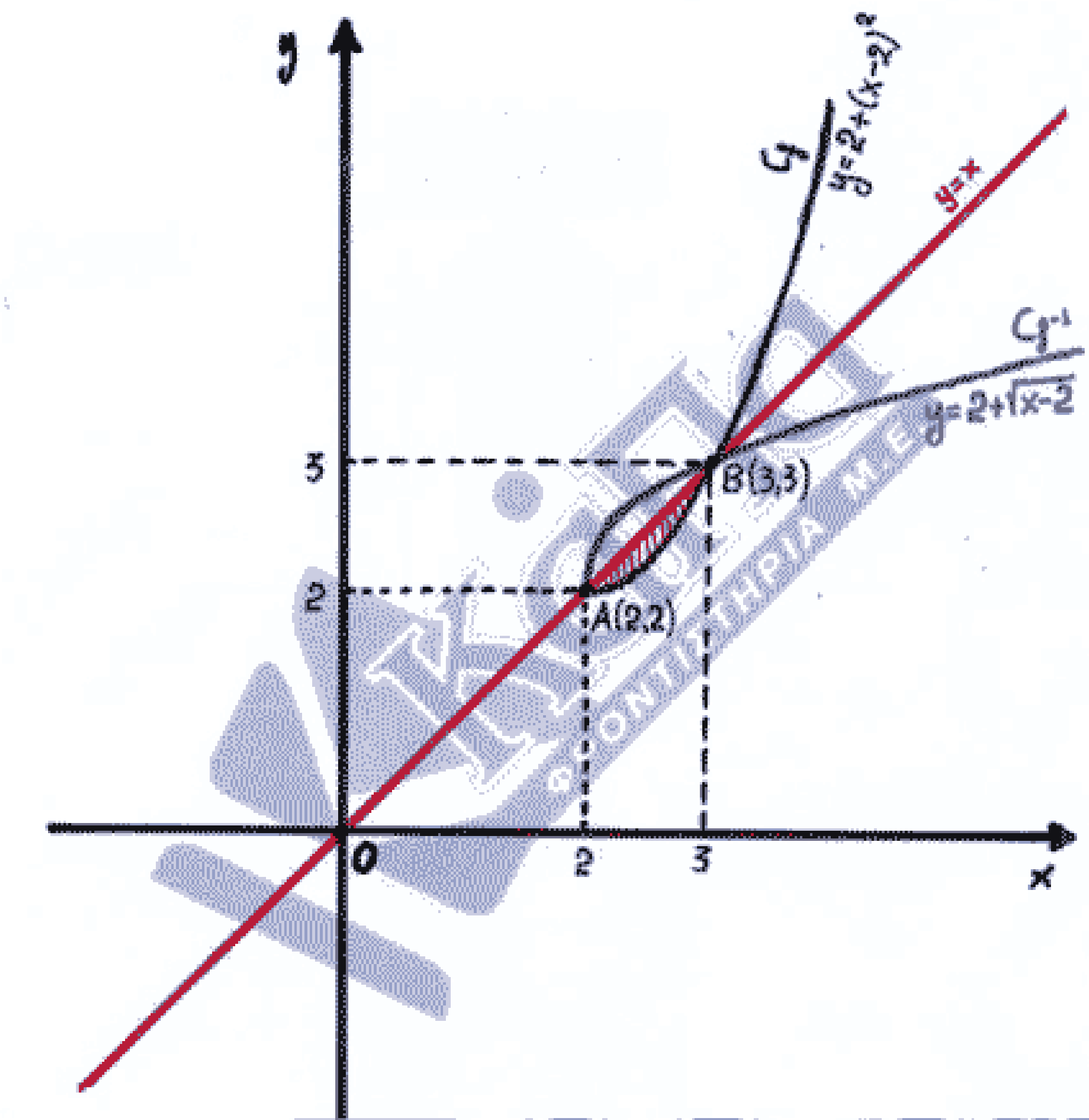
$$\left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ (x-2)(x-3)\left[(x-2)^2+(x-2)+1\right]=0 \\ x\geq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y=2+(x-2)^2 \\ (x-2)=0 \text{ ή } (x-3)=0, \text{ διότι } (x-2)^2+(x-2)+1\neq 0 \\ \text{αφού } x\geq 2 \end{array}\right\}$$

άρα $\begin{array}{l} x=2, \quad y=2 \\ x=3, \quad y=2+(3-2)^2=3 \end{array}$

άρα τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι

τα Α(2, 2) και Β(3, 3).



Επειδή υπάρχει συμμετρία της C_f και της $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y = x$ και την C_f είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y = x$ και την $C_{f^{-1}}$.

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την $C_{f^{-1}}$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την C_g με $g(x) = y = x$ και την C_f.

$$E = 2E_1 = 2\int_2^3 |g(x) - f(x)|dx \quad (1)$$

Βρίσκω το πρόσημο της διαφοράς

$$g(x) - f(x) = x - 2 - (x-2)^2 = x - 2 - x^2 + 4x - 4$$
$$= -x^2 + 5x - 6 > 0 \text{ στο } (2,\ 3)$$

$$(1) \Rightarrow E = 2\int_2^3 (g(x) - f(x))dx = 2\int_2^3 \left(-x^2 + 5x - 6\right)dx =$$

$$2\left(\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-6x\right]_2^3\right)=$$

$$2\left[\left(-\frac{3^3}{3}+\frac{5\cdot 3^2}{2}-6\cdot 3\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+\frac{5\cdot 2^2}{2}-6\cdot 2\right)\right]=$$

$$2\left(-9+\frac{45}{2}-18+\frac{8}{3}-10+12\right)=$$

$$2\frac{-150+135+16}{6}=\frac{2}{6}\ =\frac{1}{3}\text{ τ. μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.i.

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \quad (1) \qquad z_1+z_2+z_3=0 \quad (2)$

α i. Από τη σχέση (2) ισχύει: $z_1=-z_2-z_3$ οπότε

$$|z_1-z_2|=|z_3-z_1| \Leftrightarrow$$

$$|(-z_2-z_3)-z_2|=|z_3-(-z_2-z_3)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-2z_2-z_3|=|2z_3+z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2z_2+z_3|=|2z_3+z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2z_2+z_3|^2=|2z_3+z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2z_2+z_3)\left(2\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)=(2z_3+z_2)\left(2\overline{z_3}+\overline{z_2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z_2\overline{z_2}+2z_2\overline{z_3}+2z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}=$$

$$=4z_3\overline{z_3}+2z_3\overline{z_2}+2z_2\overline{z_3}+z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|z_2|^2+2\left(z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}\right)+|z_3|^2=$$

$$=4|z_3|^2+2\left(z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}\right)+|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot 1+1=4\cdot 1+1 \Leftrightarrow 0=0 \text{ ισχύει}$$

ομοίως αποδεικνύουμε $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$ αντικαθιστώντας
από τη σχέση (1) $z_3=-z_1-z_2$ και υψώνοντας στο τετράγωνο

α. ii. **1ος τρόπος**

$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2|$ άρα

$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| \le 1+1$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \le 4$

α. ii. **2ος τρόπος**

Γεωμετρικά αφού οι μιγαδικοί z_1 και z_2 έχουν μέτρο 1 οι εικόνες τους βρίσκονται σε κύκλο Κέντρου Ο και ακτίνας 1 επομένως η απόσταση των εικόνων τους που εκφράζεται από το $|z_1 - z_2|$

είναι $\le$ της διαμέτρου του κύκλου που είναι 2.

Άρα: $|z_1 - z_2| \le 2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \le 4$

Αυτό φαίνεται και στο σχήμα του β΄ερωτήματος

από τη σχέση: $|z_1 - z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow$

$(z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) \le 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) \le 4 \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \le 4 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2 - \left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + |z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow$

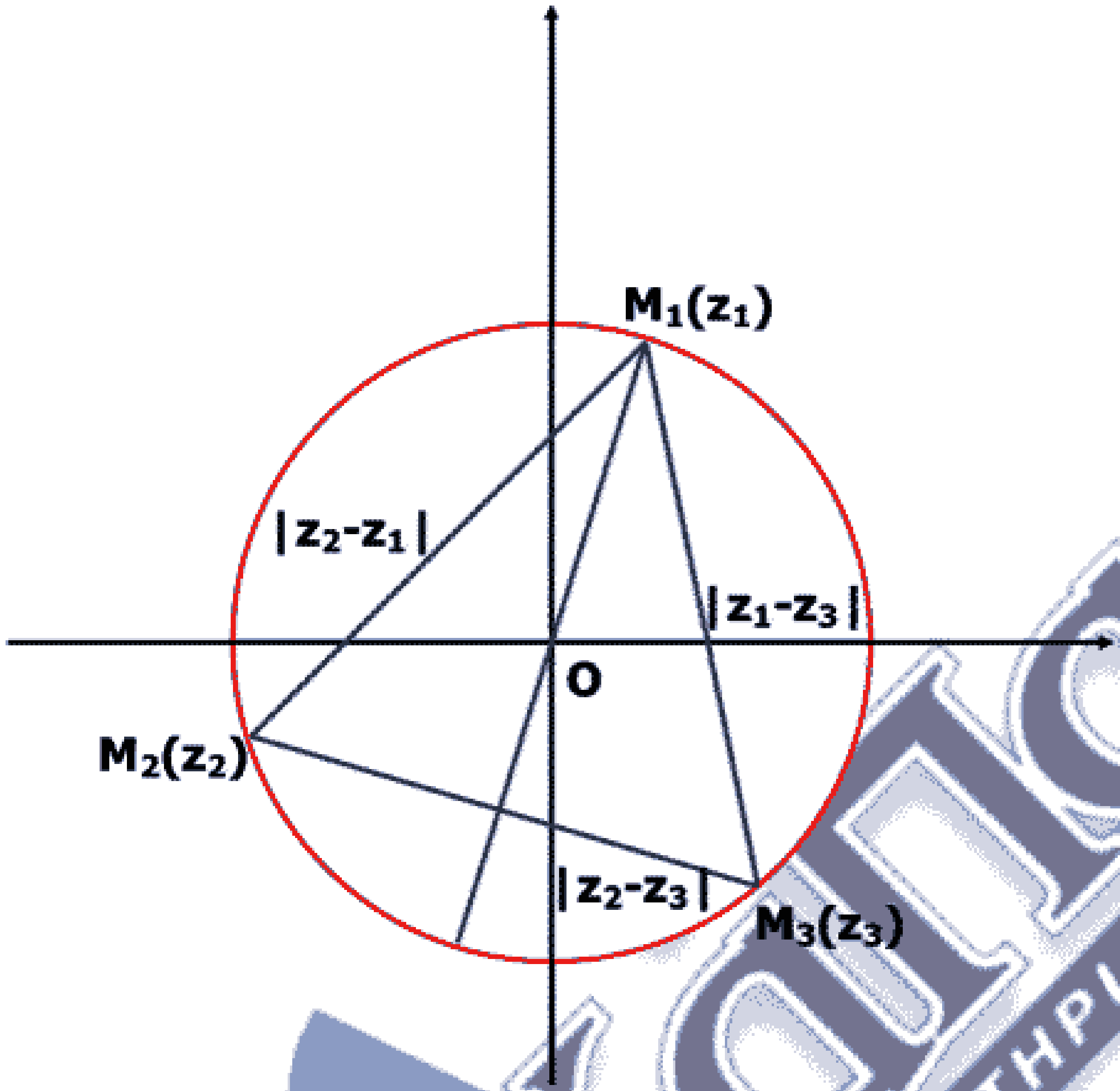
$1 - \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}\right) + 1 \le 4 \Leftrightarrow$

$-2\Re e\left(z_1\overline{z_2}\right) \le 2 \Leftrightarrow \Re e\left(z_1\overline{z_2}\right) \ge -1$

3.β

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και
$|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$
Οι εικόνες $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $(OM_1) = (OM_2) = (OM_3) = 1$ δηλαδή απέχουν στο μιγαδικό επίπεδο από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 1 και επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών είναι ΚΥΚΛΟΣ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

Επίσης $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow$
$(M_1M_2) = (M_3M_1) = (M_2M_3)$ που σημαίνει
ότι το τρίγωνο $M_1M_2M_3$ **ισόπλευρο** και
φυσικά εγγεγραμένο στον προηγούμενο κύκλο.



ΘΕΜΑ 4ο

α. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x-1 \neq 0 \text{ και } x>0\} = (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$

Η f παραγωγίζεται στο $(0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$ ως πράξη παραγωγισίμων με :

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' - (\ln x)' =$$

$$\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} =$$

$$\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} < 0 \text{ στο } (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$$

ως άθροισμα αρνητικών αριθμών

f συνεχής στο $(0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$,

άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$

Σύνολο τιμών :

$$f\left((0,\,1)\right) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (-\infty,\ +\infty)$$

διότι :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1} = -1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x) = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x+1)\frac{1}{x-1}\right] = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 > 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$ και

$x-1 < 0$ αριστερά του 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$

- $f\left((1,\,+\infty)\right) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty,\ +\infty)$

διότι :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty$$

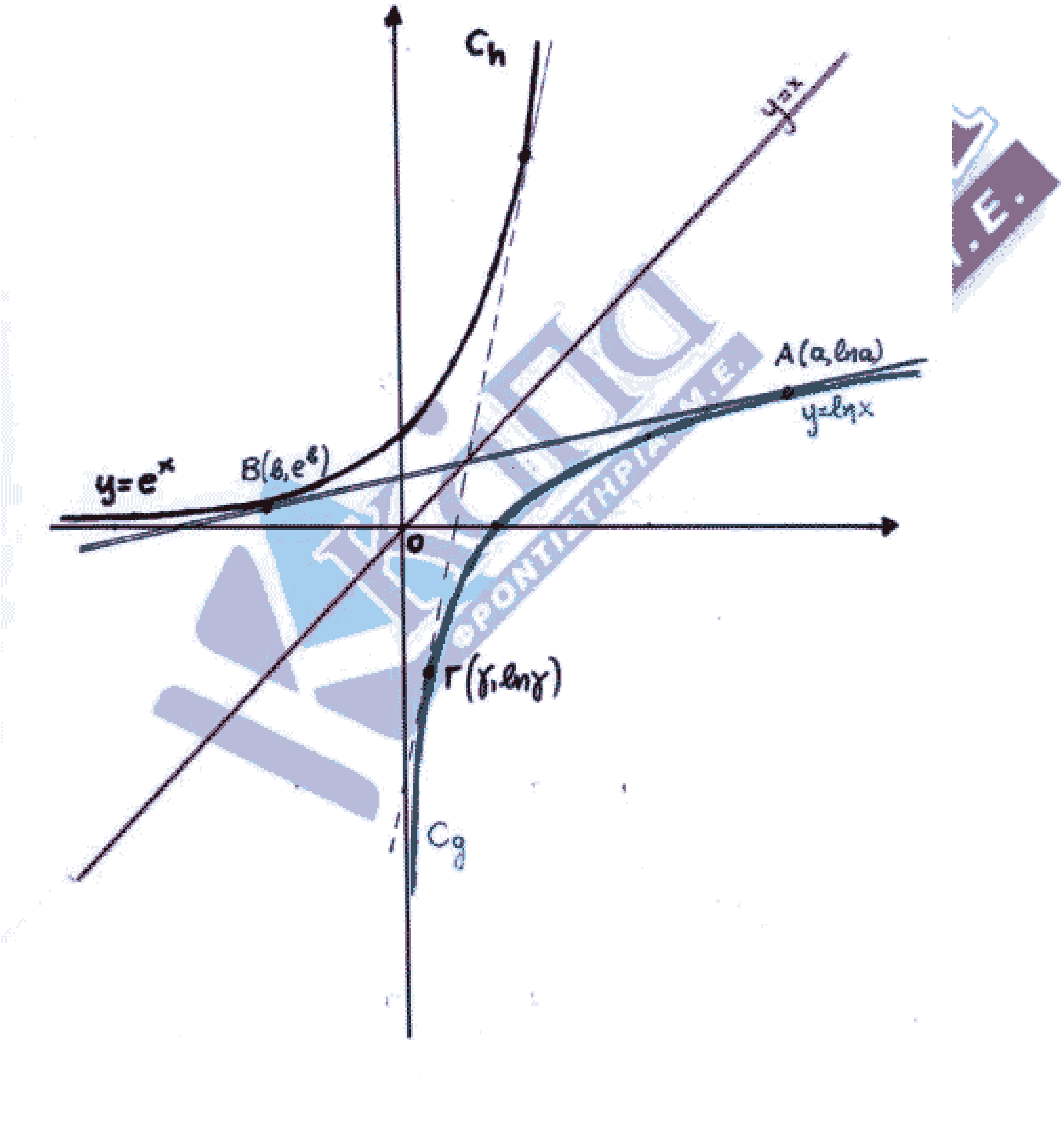
αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\ln x) = -\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x+1)\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2>0$ και $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0, x\text{-}1>0$

άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$



β) Η f στο (0, 1) έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty) = \Re$ άρα στο σύνολο τιμών περιέχεται το 0 οπότε υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα της f(x) = 0 στο (0, 1) και είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα 1 – 1.

Ομοίως η f στο (1, $+\infty$) έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty) = \Re$ άρα περιέχεται σ' αυτό το 0 οπότε υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα της f(x) = 0 στο (1, $+\infty$) και είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα 1 – 1.
Επομένως η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ) g(x) = lnx παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x}$ **άρα η** C_g

στο A(α, lnα) δέχεται εφαπτομένη με κλίση $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ **και**

εξίσωση

$$y - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln\alpha$$

$h(x) = e^x$ παραγωγίζεται στο $\Re$ με $h'(x) = e^x$

άρα η C_h στο $B\left(\beta, e^{\beta}\right)$ δέχεται εφαπτομένη με κλίση

$h'(\beta) = e^{\beta}$ και εξίσωση

$$y - e^{\beta} = e^{\beta}(x - \beta) \Leftrightarrow y = e^{\beta}x + e^{\beta} - e^{\beta}\cdot\beta \Leftrightarrow$$
$$y = e^{\beta}x + (1 - \beta)e^{\beta}$$

Αφού οι δύο εφαπτομένες ταυτίζονται άρα

$$\frac{1}{\alpha}x + \ln\alpha - 1 = e^{\beta}x + (1 - \beta)e^{\beta}$$

πρόκειται για ισότητα πολυωνύμων οπότε ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\alpha} = e^{\beta} \\ \ln\alpha - 1 = e^{\beta}(1 - \beta) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = \ln\frac{1}{\alpha} \\ \ln\alpha - 1 = e^{\beta}(1 - \beta) \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} \beta = -\ln\alpha & (1) \\ \ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \ln\alpha\right) & (2) \end{array}\right\}$$

$$(2):\ \ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{\ln\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow\ \alpha\ln\alpha - \alpha = 1 + \ln\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\alpha(\alpha - 1) = 1 + \alpha$$

Αν $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ οπότε $\alpha \neq 1$ τότε έχω

$$\ln\alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ln\alpha = 0$$

άρα αποτελεί ρίζα της f(x) = 0 αφού την επαληθεύει και ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

δ) Στο (γ) ερώτημα αποδείξαμε ότι η τετμημένη α του σημείου Α(α, lnα) στο οποίο η εφαπτομένη της C_g είναι και εφαπτομένη της C_h είναι ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0.
Λόγω (β) ερωτήματος η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς 2 ρίζες δηλαδή υπάρχει $\gamma \neq \alpha$ τέτοιο ώστε f(γ) = 0. Άρα υπάρχει αντίστοιχο σημείο Γ(γ, lnγ) της C_g στο οποίο η εφαπτομένη της είναι και εφαπτομένη της C_h άρα κοινή εφαπτομένη.
Τελικά υπάρχουν 2 ακριβώς κοινές εφαπτόμενες.