ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
22-05-2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 5ος κανόνας Λογισμού των πιθανοτήτων
Σχ. Βιβλίο σελ. 152

Β. α. Ορισμός σχ. Βιβλίο σελ. 22
β. Ορισμός σχ. Βιβλίο σελ. 87

Γ1. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος

Γ2. $f_1'(x) = \left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu - 1}$

$f_2'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f_3'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f_4'(x) = -\eta\mu x$

ΘΕΜΑ2ο

$f(x) = xe^x + 3, \quad x \in \Re$

α. $f'(x) = \left(xe^x\right)' + (3)' = (x)'e^x + x\left(e^x\right)' =$

$e^x + xe^x = e^x + xe^x + 3 - 3 =$

$xe^x + 3 + e^x - 3 = f(x) + e^x - 3$

β. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$

Παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[f'(x)-e^x\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+xe^x-e^x\right) =$
  $\lim\limits_{x\to 0}\left(xe^x\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-x\right)=0$

Οπότε για $x\neq 0$ και $x\neq 1$

$$g(x) = \frac{f'(x)-e^x}{x^2-x}=\frac{xe^x}{x(x-1)}=\frac{e^x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^0}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

ΘΕΜΑ 3Ο

$\Omega=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

α. Έστω $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=$

$2P(3)=2P(4)=2P(5)=\kappa$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=\kappa \\ P(3)=P(4)=P(5)=\dfrac{\kappa}{2} \end{cases} \text{ με}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0\le\kappa\le 1 \\ 0\le\dfrac{\kappa}{2}\le 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0\le\kappa\le 1$$

Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας ισχύει:

$P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$

$$\Leftrightarrow \kappa+\kappa+\kappa+\kappa+\frac{\kappa}{2}+\frac{\kappa}{2}+\frac{\kappa}{2}=1\Leftrightarrow$$

$$4\kappa+3\frac{\kappa}{2}=1\Leftrightarrow 8\kappa+3\kappa=2\Leftrightarrow 11\kappa=2\Leftrightarrow\kappa=\frac{2}{11}$$

Άρα:

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$$P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$$

$$\Leftrightarrow \kappa+\kappa+\kappa+\kappa+\frac{\kappa}{2}+\frac{\kappa}{2}+\frac{\kappa}{2}=1 \Leftrightarrow$$

$$4\kappa+3\frac{\kappa}{2}=1 \Leftrightarrow 8\kappa+3\kappa=2 \Leftrightarrow 11\kappa=2 \Leftrightarrow \kappa=\frac{2}{11}$$

β. Ισχύει $A\cap B=\{-1,3\}$.

Αφού το Α περιέχει τρία στοιχεία, εκ των οποίων τα δύο είναι το 1 και το 3, πρέπει:

$x^2-x-3=-1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $x=2$

- για $\boxed{x=-1}$ τα στοιχεία του Β γίνονται:

  $x+1=-1+1=0\in\Omega$

  $2x^2+x-2=2-1-2=-1\in\Omega$

  $-2x+1=2+1=3\in\Omega$

  Στην περίπτωση αυτή:

  $A=\{1,\ 3,\ -1\}$ και $B=\{2,\ 0,\ -1,\ 3\}$

  Οπότε $A\cap B=\{-1,\ 3\}$

- Για $\boxed{x=2}$ τα στοιχεία του Β γίνονται:

  $x+1=2+1=3\in\Omega$

  $2x^2+x-2=8+2-2=8\notin\Omega$

  άρα $x=2$ απορρίπτεται

  Τελικά $\boxed{x=-1}$

γ. Για $x=-1$:

$A=\{1,\ 3,-1\}$ $\quad B=\{2,\ 0,-1,\ 3\}$

$A\cap B=\{-1,\ 3\}$

$$P(A)=P(1)+P(3)+P(-1)=\frac{2}{11}+\frac{1}{11}+\frac{2}{11}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(A)=\frac{5}{11}}$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) =$

$\frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} \Leftrightarrow \boxed{P(B) = \frac{7}{11}}$

$P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} \Leftrightarrow$

$\boxed{P(A \cap B) = \frac{3}{11}}$

$A - B = \{1\}$

$P(A - B) = P(1) = \frac{2}{11} \Leftrightarrow \boxed{P(A - B) = \frac{2}{11}}$

$\left(\text{ή } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}\right)$

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') =$

$P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) = \frac{5}{11} + \frac{11}{11} - \frac{7}{11} - \frac{2}{11} \Leftrightarrow$

$\boxed{P(A \cup B') = \frac{7}{11}}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δείγμα Α : 12, 18, t_3, t_4, …, t_{25}
Δείγμα Β : 16, 14, t_3, t_4, …, t_{25}
Δίνεται ότι : $t_3 + t_4 + \ldots + t_{25} = 345$

α.

$$\overline{x_A} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} = \frac{12 + 18 + 345}{25} = \frac{375}{25} \Leftrightarrow \overline{x_A} = 15$$

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} = \frac{16 + 14 + 345}{25} = \frac{375}{25} \Leftrightarrow \overline{x_B} = 15$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

β.

$$s_A{}^2 = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}\left(t_i - \overline{x_A}\right)^2$$

$$= \frac{1}{25}\left[(12-15)^2 + (18-15)^2 + \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}\left[3^2 + 3^2 + \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2\right]$$

$$s_B{}^2 = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}\left(t_i - \overline{x_B}\right)^2$$

$$= \frac{1}{25}\left[(16-15)^2 + (14-15)^2 + \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}\left[1 + 1 + \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2\right]$$

Άρα αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε :

$$s_A{}^2 - s_B{}^2 =$$

$$= \frac{1}{25}\left[9 + 9 + \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2\right] - \frac{1}{25}\left[1 + 1 + \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}\left[9 + 9 + \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2 - 1 - 1 - \sum_{i=3}^{25}(t_i-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}\cdot 16 \Leftrightarrow s_A{}^2 - s_B{}^2 = \frac{16}{25}$$

γ.

$$CV_A = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{s_A}{|\overline{x}_A|} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow s_A = \frac{1}{15}\overline{x_A} \Leftrightarrow s_A = \frac{1}{15}\cdot 15$$

$$\Leftrightarrow s_A = 1$$

Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει :

$$s_A{}^2 - s_B{}^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow s_B{}^2 = 1^2 - \frac{16}{25}$$

$$= \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$s_B = \sqrt{s_B{}^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Οπότε :

$$CV_B = \frac{s_B}{|\overline{x}_B|} = \frac{\frac{3}{5}}{15} = \frac{3}{5\cdot 15} \Leftrightarrow CV_B = \frac{1}{25}$$