

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A. 1 Θεώρημα σχ. βιβλίου σελ. 98

A. 2 Ορισμός σχ. βιβλίου σελ. 141

A. 3 Ορισμός σχ. βιβλίου σελ. 280

B.  $\alpha \rightarrow$  Λάθος

$\beta \rightarrow$  Λάθος

$\gamma \rightarrow$  Λάθος

$\delta \rightarrow$  Σωστό

$\epsilon \rightarrow$  Σωστό

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

a)  $z = \frac{2 + ai}{a + 2i}$ ,  $a \in \mathfrak{R}$

$$|z| = \left| \frac{2 + ai}{a + 2i} \right| = \frac{|2 + ai|}{|a + 2i|} = \frac{\sqrt{4 + a^2}}{\sqrt{a^2 + 4}} = 1$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού  $z$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

β) για  $a = 0$ ,  $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$

για  $a = 2$ ,  $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$

i) η απόσταση των μιγαδικών  $z_1$  και  $z_2$  είναι :

$$|z_1 - z_2| = |-i - 1| = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

ii)  $(z_1^{2v}) = (-i)^{2v} = (-1)^{2v} i^{2v} = (i^2)^v = (-1)^v$

$$(-z_2)^v = (-1)^v$$

άρα  $(z_1^{2v}) = (-z_2)^v$  για κάθε  $v \in \mathbb{N}$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>




α)

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

Παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική

$$f'(x) = (x^3)' - 3(x)' - (2\eta\mu^2\theta)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		TM		TE	

- $f'(x) > 0$  στο  $(-\infty, -1)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(-1, 1)$  άρα η f στο -1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(-1) = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$



- $f'(x) < 0$  στο  $(-1, 1)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(1, +\infty)$  άρα η f στο 1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$$f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$$

- $f'(x) = 3(x^2 - 1)$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική

$$f''(x) = 3(x^2)' - (3)' = 6x$$

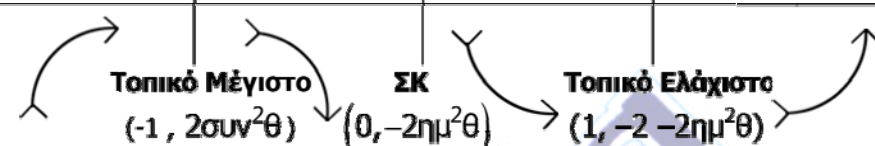
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)	-	0	+
f(x)		ΣΚ	

Η  $f''(x)$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 0 και ως παραγωγίσιμη στο 0 δέχεται εφαπτομένη στο  $\Gamma(0, f(0))$ , άρα το  $\Gamma(0, f(0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

Πίνακας μεταβολών της  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	-		0	+	+
$f(x)$					



Τοπικό Μέγιστο  $(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$       ΣΚ  $(0, -2\eta\mu^2\theta)$       Τοπικό Ελάχιστο  $(1, -2-2\eta\mu^2\theta)$

β) Σύνολο τιμών για  $x \in (-\infty, -1]$  :

$$f((-\infty, -1]) \stackrel{f \uparrow}{=} \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right) \stackrel{(1)}{=} \stackrel{(2)}{=} (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad (1)$$

$$f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0 \quad (2) \text{ αφού } \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Παρατηρώ ότι το 0 περιέχεται στο  $(-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$ , άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της  $f(x) = 0$  στο  $(-\infty, -1]$  η οποία είναι και μοναδική, αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -1]$  άρα και «1-1».

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0 \\ f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1)f(1) < 0$$

$f$  συνεχής στο  $[-1, 1]$ , άρα ισχύει θεώρημα Bolzano, οπότε υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της  $f(x) = 0$  στο  $(-1, 1)$  η οποία είναι και μοναδική, αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 1]$  άρα και «1-1».

• Σύνολο τιμών για  $x \in [1, +\infty)$  :

$$f([1, +\infty)) \stackrel{f \uparrow}{=} \left[ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[ f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \stackrel{(3)}{=} \stackrel{(4)}{=} [-2-2\eta\mu^2\theta, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (3)$$

$$f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0 \quad (4)$$

Παρατηρώ ότι το 0 περιέχεται στο  $[-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty)$ , άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της  $f(x) = 0$  στο  $[1, +\infty)$ , η οποία είναι και μοναδική, αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  άρα και «1-1».

Τελικά η  $f$  έχει 3 ακριβώς πραγματικές ρίζες μία στο  $(-\infty, -1)$ , μία στο  $(-1, 1)$  και μία στο  $(1, +\infty)$ .

$$\mathbf{\nu)} A(-1, 2 - 2\eta\mu^2\theta) \quad B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta)) \quad \Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$$

Παρατηρώ ότι οι συντεταγμένες των σημείων  $A, B, \Gamma$  επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$  αφού:

$$2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta \text{ ισχύει}$$

$$-2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta \text{ ισχύει}$$

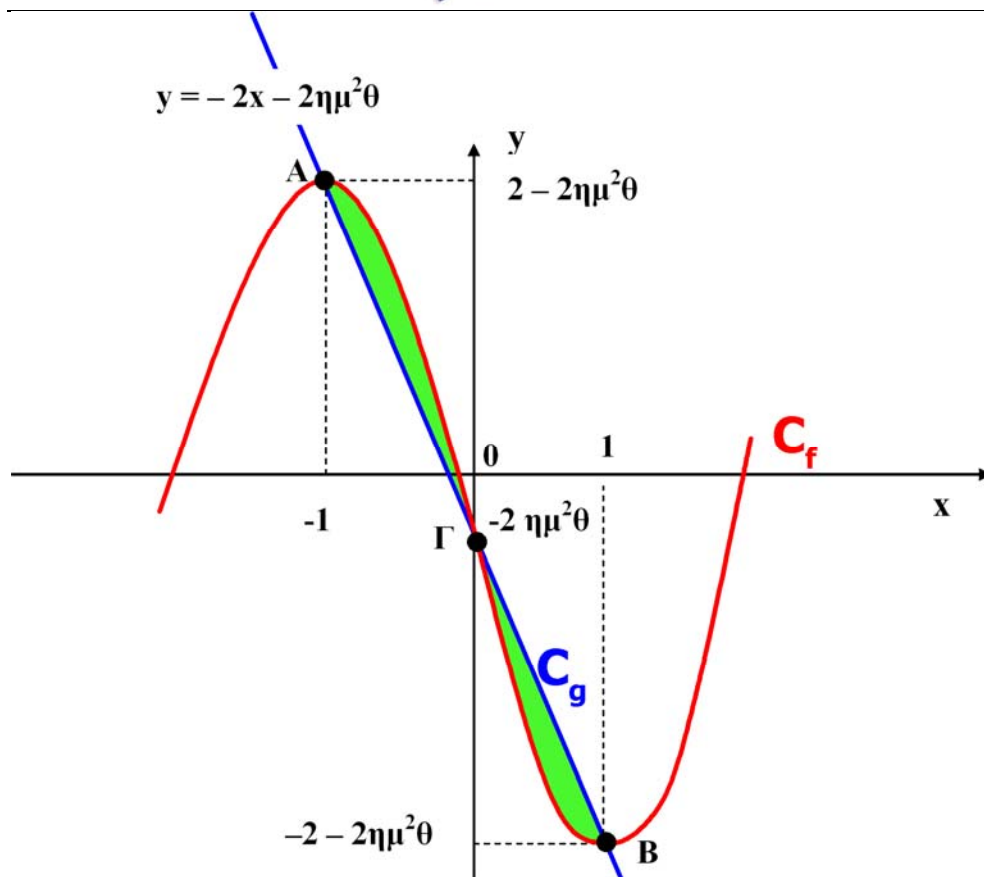
$$-2\eta\mu^2\theta = -2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta \text{ ισχύει.}$$

$$\mathbf{\delta)} \text{ Έστω } g(x) = -2x - 2\eta\mu^2\theta, \quad \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Από το γ ερώτημα ξέρω ότι η ευθεία

$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta = g(x)$  τέμνει την  $C_f$  στα τρία σημεία  $A, B, \Gamma$  άρα

$$\text{το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι } E = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$$



Ισχύει:  $f(x) - g(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta = x^3 - x = x(x^2 - 1) > 0$  στο  $(-1, 0)$

και  $f(x) - g(x) = x(x^2 - 1) < 0$  στο  $(0, 1)$ .

	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$x$	-	-	$0$	+	+
$x^2 - 1$	+	-	-	-	+
$x(x^2 - 1)$	-	+	-	+	+

$$\text{Άρα } E = \int_{-1}^0 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx =$$

$$\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 =$$

$$= 0 - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

## ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

**α)**

Επειδή η  $f$   $\nearrow$  στο  $[0, 1]$ , για  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0) > 0$ , άρα  
 $f(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$   
από υπόθεση  $g(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

άρα  $f(x)g(x) > 0$  στο  $[0, 1]$  (1)

$f(x)$  συνεχής στο  $[0, 1]$ ,  $g(x)$  συνεχής στο  $[0, 1]$ ,  
οπότε  $f(x)g(x)$  συνεχής στο  $[0, 1]$  με αρχική

την  $F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$  παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$

με  $F'(x) = f(x)g(x) > 0$  (2) στο  $[0, 1]$ .

Επομένως  $F$   $\nearrow$  στο  $[0, 1]$  και επειδή

$F(0) = \int_0^0 f(t)g(t)dt = 0$  θα είναι  $0 < x \leq 1 \Rightarrow F(x) > F(0) = 0$

δηλαδή  $F(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (0, 1]$

**β)**  $t \in [0, x]$  άρα  $0 \leq t \leq x$

$f$   $\nearrow$  στο  $[0, x] \subseteq [0, 1]$ , άρα  $f(0) \leq f(t) \leq f(x)$  (3)

Η ισότητα ισχύει μόνο για  $t = x$  ή για  $t = 0$

και επειδή  $g(t) > 0$  στο  $[0, x]$

(3)  $\Rightarrow f(t)g(t) \leq f(x)g(t) \Leftrightarrow f(x)g(t) - f(t)g(t) \geq 0$  και επειδή

$f(x)g(t) - f(t)g(t)$  δεν είναι παντού 0 στο  $[0, x]$  αλλά μόνο

στο 0 και στο  $x$ , και  $f(x)g(t) - f(t)g(t)$  συνεχής στο  $[0, x]$  τότε

$$\int_0^x (f(x)g(t) - f(t)g(t)) dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(x)g(t) dt - \int_0^x f(t)g(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \int_0^x g(t) dt > \int_0^x f(t)g(t) dt \Rightarrow f(x)G(x) > F(x) \text{ για κάθε } x \in (0, 1]$$

**γ)**

$G(x) = \int_0^x g(t)dt$  είναι αρχική της συνεχούς  $g(x)$ ,

άρα παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  με  $G'(x) = g(x) > 0$  (4) στο  $[0, 1]$

$G'(x) > 0$  στο  $[0, 1]$ ,  $G(x)$  συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο  $[0, 1]$ ,  
 άρα  $G(x)$   $\nearrow$  στο  $[0, 1]$ . Επομένως

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow G(x) > G(0) = \int_0^0 g(t)dt = 0$$

Δηλαδή  $G(x) > 0 \forall x \in (0, 1]$ , άρα  $G(x) \neq 0$  στο  $(0, 1]$ .

Επομένως ορίζεται στο  $(0, 1]$  η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \text{ παραγωγίσιμη στο } (0, 1]$$

ως ηλίκο παραγωγισίμων με

$$h'(x) = \left( \frac{F(x)}{G(x)} \right)' = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} =$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{f(x)g(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)} =$$

$$\stackrel{(4)}{=} \frac{g(x)[f(x)G(x) - F(x)]}{G^2(x)} > 0 \text{ διότι}$$

$g(x) > 0$  στο  $[0, 1]$ ,  $f(x)G(x) - F(x) > 0$  στο  $(0, 1]$  από (β) ερώτημα,  
 $G^2(x) > 0$  στο  $(0, 1]$

Δηλαδή  $h'(x) > 0$  στο  $(0, 1]$ ,  $h(x)$  συνεχής ως παραγωγίσιμη στο  
 $(0, 1]$ , άρα  $h$   $\nearrow$  στο  $(0, 1]$ , επομένως παρουσιάζει μέγιστο στο 1  
 το  $h(1)$ , άρα ισχύει

$h(x) \leq h(1)$  για κάθε  $x \in (0, 1]$ , δηλαδή

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)} \text{ για κάθε } x \in (0, 1]$$

**δ)**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt \cdot \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{\left( \int_0^x g(t)dt \right) x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \right]$$

$\int_0^x f(t)g(t)dt = F(x)$  παραγωγίσιμη, άρα συνεχής

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t)g(t)dt = F(0) = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x g(t)dt = G(0) = 0 \quad (6)$$

και επειδή οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες δεξιά του 0 και

$\left( \int_0^x g(t)dt \right)' = g(x) > 0$  εφαρμόζεται ο κανόνας de l' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( \int_0^x f(t)g(t)dt \right)'}{\left( \int_0^x g(t)dt \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) > 0$$

(αφού η  $f$  είναι συνεχής και στο 0)

$\sigma(x) = \eta \mu x^2$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  άρα έχει αρχική την

$\Sigma(x) = \int_0^x \eta \mu t^2 dt$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .  $\varphi(x) = x^2$  είναι

παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τότε

$\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt = \Sigma(\varphi(x))$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως σύνθεση

παραγωγίσιμων άρα συνεχής οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt = \int_0^0 \eta \mu t^2 dt = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0 \quad (8)$$

και επειδή οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες δεξιά του 0

και  $(x^5)' = 5x^4 \neq 0$  δεξιά του 0 εφαρμόζεται καν. de l' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)'}{(x^5)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^4 \cdot (x^2)'}{5x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta \mu x^4}{x^4} \cdot \frac{2x}{5} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

διότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5} = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^4}{x^4} \stackrel{w=x^4}{=} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\eta \mu w}{w} = 1$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} = f(0) \cdot 0 = 0$$