ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 22-05-2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απόδειξη σχολικό βιβλίο, σελίδα 28
Β. Ορισμός σχολικό βιβλίο. Σελίδα 96
Γ. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

$f(x) = \frac{x-1}{e^x}, \quad x \in \Re$

α. Ζητάμε το: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x \cdot f(x)}{x^2-1}$

Έστω $g(x) = \frac{e^x \cdot f(x)}{x^2-1}$ με $x \in \Re - \{-1, 1\}$ τότε:

$$g(x) = \frac{e^x \cdot \frac{x-1}{e^x}}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με:

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{e^x}\right)' = \frac{(x-1)' \cdot e^x - (x-1)\cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x - (x-1)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x - (1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$$

Τότε: $e^x \cdot f'(x) = e^x \cdot \frac{2-x}{e^x} = 2-x$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

γ. $f'(x) = \dfrac{2-x}{e^x}, \quad x \in \Re$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{e^x} = 0 \\ \text{Όμως } e^x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{e^x} > 0 \\ \text{Όμως } e^x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow x<2$$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$

Μέγιστο

Αφού:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \text{ για } x_0 = 2 \in \Re \\ f'(x) > 0 \text{ για } x \in (-\infty, 2) \\ f'(x) < 0 \text{ για } x \in (2, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = \dfrac{2-1}{e^2} = \dfrac{1}{e^2}$

ΘΕΜΑ 3ο

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α.

$$\overline{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_{A_i}}{V_A} = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\overline{x}_A = 22 \text{ χιλιάδες ώρες}}$$

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_{B_i}}{V_B} = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\overline{x}_B = 24 \text{ χιλιάδες ώρες}}$$

β. Για να αποφασίσουμε ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσουμε, κάνουμε αναγωγή στην μονάδα έτσι, ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε τη σύγκριση:

- Μπαταρία τύπου A:

22 χιλιάδες ώρες — 38 ευρώ

1 χιλιάδα ώρα — X_A

$$x_A = \frac{38}{12} = \frac{19}{11} = \frac{57}{33} \text{ ευρώ/χιλιάδες ώρες}$$

ή $x_A \approx 1{,}73$ ευρώ/χιλιάδες ώρες

- Μπαταρία τύπου B:

24 χιλιάδες ώρες — 40 ευρώ

1 χιλιάδα ώρα — X_B

$$x_B = \frac{40}{24} = \frac{5}{3} = \frac{55}{33} \text{ ευρώ/χιλιάδες ώρες}$$

ή $x_B \approx 1{,}67$ ευρώ/χιλιάδες ώρες

Αφού $x_A > x_B$, θα επιλέξουμε τη μπαταρία τύπου B

γ. $$S_A^{\,2}=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(t_{A_i}-\overline{x}_A\right)^2}{V_A}=$$

$$=\frac{(20-22)^2+(26-22)^2+(24-22)^2+(22-22)^2+(18-22)^2}{5}$$

$$=\frac{4+16+4+0+16}{5}=\frac{40}{5}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{S_A^{\,2}=8\ (\text{χιλιάδες ώρες})^2}$$

$$S_B^{\,2}=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(t_{B_i}-\overline{x}_B\right)^2}{V_B}=$$

$$=\frac{(26-24)^2+(32-24)^2+(19-24)^2+(20-24)^2+(23-24)^2}{5}$$

$$=\frac{4+64+25+16+1}{5}=\frac{110}{5}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{S_B^{\,2}=22\ (\text{χιλιάδες ώρες})^2}$$

Άρα:

$S_A=\sqrt{S_A^{\,2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ χιλιάδες ώρες

και $S_B=\sqrt{S_B^{\,2}}=\sqrt{22}$ χιλιάδες ώρες

δ. Για να συγκρίνουμε τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια, πρέπει να συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβολής τους.

$$CV_A=\frac{S_A}{\overline{\overline{x}}_A}=\frac{2\sqrt{2}}{22}=\frac{\sqrt{2}}{11}$$

και

$$CV_B=\frac{S_B}{\overline{\overline{x}}_B}=\frac{\sqrt{22}}{24}$$

Σύγκριση των συντελεστών μεταβολής:

Α′ τρόπος: (αφού δίνεται ότι $\sqrt{11} \approx 3{,}3$)

$$CV_A = \frac{\sqrt{2}}{11} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}{11\cdot\sqrt{11}} \approx \frac{\sqrt{22}}{11\cdot 3{,}3} = \frac{\sqrt{22}}{36{,}3}$$

$$CV_B = \frac{\sqrt{22}}{24}$$

Άρα: $CV_A < CV_B$, δηλαδή μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζουν οι μπαταρίες τύπου Α.

Β′ τρόπος:

$$CV_A^{\ 2} = \frac{\sqrt{2}^2}{11^2} = \frac{2}{121} = \frac{2\cdot 288}{121\cdot 288} = \frac{576}{121\cdot 288}$$

$$CV_B^{\ 2} = \frac{\sqrt{22}^2}{24^2} = \frac{22}{576} = \frac{11}{288} = \frac{11\cdot 121}{288\cdot 121} = \frac{1331}{121\cdot 288}$$

Άρα:

$$CV_A^{\ 2} < CV_B^{\ 2} \Leftrightarrow CV_A < CV_B$$

ΘΕΜΑ 4º

α. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: «Ο κάτοικος να διαβάζει την εφημερίδα α»
Β: «Ο κάτοικος να διαβάζει την εφημερίδα β»

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

$A \cap B'$: "ο κάτοικος να διαβάζει την εφημερίδα α και όχι τη β"

$$P(A \cap B') = P(A - B) = \frac{30}{100} = 0{,}3 \quad (1)$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$A' \cup B$: "ο κάτοικος να μη διαβάζει την εφημερίδα α
ή να διαβάζει τη β"

$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$
$= 1 - P(A) + P(B) - P(B - A)$
$= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)]$
$= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B)$
$= 1 - P(A) + P(A \cap B) \quad (2)$

Όμως $P(A - B) = 0,3 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{30}{100}$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - \frac{30}{100} \Leftrightarrow P(A \cap B)$

$= \frac{50}{100} - \frac{30}{100} = \frac{20}{100} = 0,2$

Οπότε:

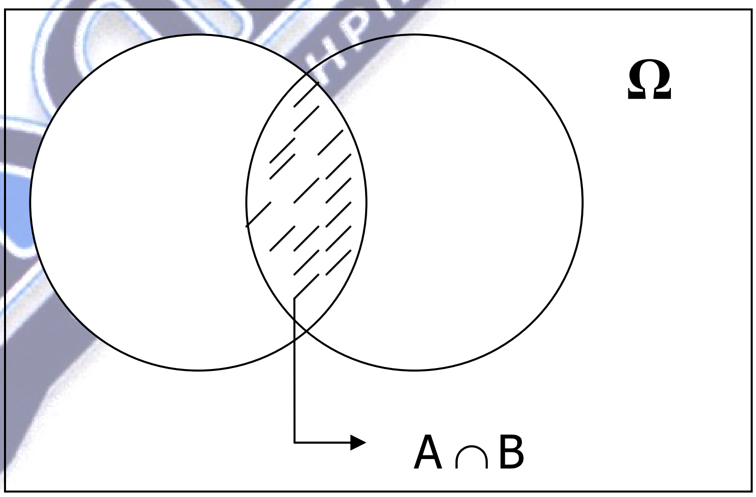
$(2) \Leftrightarrow P(A' \cup B) = 1 - 0,5 + 0,2 = 1 - 0,3 \Leftrightarrow \boxed{P(A' \cup B) = 0,7}$

β. Ισχύει ότι:

* $A \cap B \subseteq B$ οπότε:

$P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow$

$\frac{20}{100} \leq P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq P(B) \quad (1)$

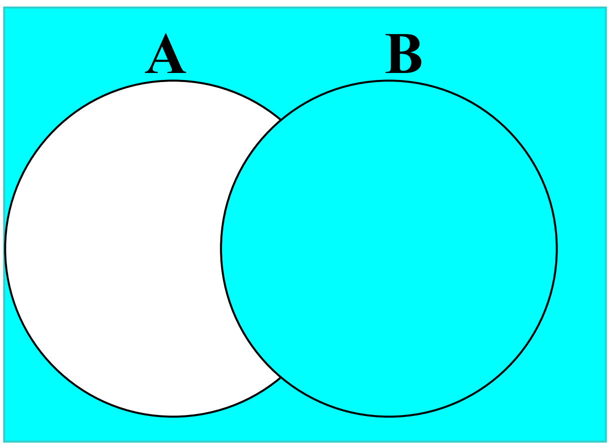


* $B \subseteq A' \cup B$ οπότε:

$P(B) \leq P(A' \cup B)$

$\Leftrightarrow P(B) \leq 0,7 \Leftrightarrow \boxed{P(B) \leq \frac{7}{10}} \quad (2)$

$(1), (2) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}}$



γ.

$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)\cdot x, \quad x \in \mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f'(x) = \left(x^3\right)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + \left(P(B)\cdot x\right)' = 3x^2 - x + P(B)$

$\Delta = 1 - 4\cdot 3\cdot P(B)$

γνωρίζω ότι:

$\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10} \Leftrightarrow -12\cdot\frac{1}{5} \ge -12P(B) \ge -12\frac{7}{10} \Leftrightarrow$

$1 - \frac{12}{5} \ge 1 - 12P(B) \ge 1 - \frac{42}{5} \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \ge \Delta \ge -\frac{37}{5}$ άρα $\Delta < 0$

Οπότε:

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

f $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατα.