

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**  
**Μαθηματικά Γενικής Παιδείας**  
**18-05-2009**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Α. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 150.

Β. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 65.

Γ. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

$$\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{\sum_{i=1}^4 v_i} = 4 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot v_2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + v_2 + 3 + 4} = 4 \Leftrightarrow \frac{12 + 3 \cdot v_2 + 15 + 32}{v_2 + 13} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha. \frac{59 + 3v_2}{v_2 + 13} = 4 \Leftrightarrow 59 + 3v_2 = 4v_2 + 52 \Leftrightarrow \boxed{v_2 = 7}$$

β. Το μέγεθος του δείγματος είναι:  $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 6 + 7 + 3 + 4 = 20$

Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{1}{20} \left[ (2-4)^2 \cdot 6 + (3-4)^2 \cdot 7 + (5-4)^2 \cdot 3 + (8-4)^2 \cdot 4 \right] =$$

$$\frac{1}{20} (4 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 16 \cdot 4) =$$

$$= \frac{1}{20} (24 + 7 + 3 + 64) = \frac{98}{20} = \frac{49}{10} = \boxed{4,9}$$

γ. Η τυπική απόκλιση είναι:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4,9} \approx 2,2$$

Για να εξετάσουμε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια, υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβολής CV:

Αφού  $\bar{x} > 0$  ισχύει:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% \approx \frac{2,2}{4} \cdot 100\% = 2,2 \cdot 25\% = 55\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X δεν είναι ομοιογενές.

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

α. Η  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ως πολωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + ax - 7)' = (x^3)' - (6x^2)' + (ax)' - (7)' = 3x^2 - 12x + a$$

Η  $f'$  είναι πολωνυμική και είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$f''(x) = (3x^2 - 12x + a)' = (3x^2)' - (12x)' + (a)' = 6x - 12$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση που δίνεται και έχουμε:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + a + 15 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$12x - 24 - 12x + a + 15 = 0 \Leftrightarrow a - 9 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 9}$$

Για  $a = 9$ :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

β.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 1}$

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή ορίου, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3(x^2 - 4x + 3)] = 3(1 - 4 + 3) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0$$

Για  $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ , έστω:

$$g(x) = \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 1} = \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-3)}{x+1}$$

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{3(x-3)}{x+1} \right] = \frac{3(1-3)}{1+1} = \frac{3(-2)}{2} = \boxed{-3}$$

γ. Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon): y = -3x$  θα ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{\varepsilon\phi} = \lambda = -3 \\ \lambda_{\varepsilon\phi} = f'(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = -3 \quad (2) \Leftrightarrow 3(x_0^2 - 4x_0 + 3) =$$

$$-3 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = 8 - 24 + 18 - 7 = -5 \quad (3)$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το  $A(2, -5)$ .

#### Α' τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  θα είναι:  $y = \lambda x + \beta$  (1)

Οι συντεταγμένες του  $A$  θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, άρα:

(2)

$$(1) \Leftrightarrow -5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow -5 + 6 = \beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

(3)

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι:  $y = -3x + 1$

### Β' τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  είναι:

(2)

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - (-5) = -3(x - 2) \Leftrightarrow y + 5 = -3x + 6 \Leftrightarrow \boxed{y = -3x + 1}$$

(3)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

**Α. α.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = \left(\ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2\right)' = (\ln x)' - \left(\frac{x}{2}\right)' + (\lambda^2)' - (6\lambda)' + (2)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Αφού η  $f'(x) > 0$  στο  $(0, 2)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 2]$ .

Αφού η  $f'(x) < 0$  στο  $(2, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[2, +\infty)$ .

**β.** Ο πίνακας μεταβολών είναι:

$x$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗ μέγιστο $f(2)$	↘

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του κριτηρίου της 1<sup>ης</sup> παραγώγου:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (0, 2) \\ f'(x) < 0 \text{ στο } (2, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ παρουσιάζει μέγιστο στο } x_0 = 2,$$

$$\text{το } f(2) = \ln 2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

### **B.**

**α.** Οι αριθμοί  $2, 4, 8, 3, 5 \in [2, +\infty)$  όπου η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε θα ισχύει:

$$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \xrightarrow{f \downarrow} f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$$

$$\begin{aligned} R &= \text{μεγαλύτερη} - \text{μικρότερη παρατήρηση} = \\ &= f(2) - f(8) = \ln 2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 - \left( \ln 8 - \frac{8}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 \right) = \\ &= \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 - 3\ln 2 + 4 - \lambda^2 + 6\lambda - 2 = \\ &= -2\ln 2 + 3 = \ln 2^{-2} + 3 = 3 + \ln \frac{1}{2^2} = \boxed{3 + \ln \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι :  $f(8), f(5), f(4), f(3), f(2)$  αφού  $n = 5$  (περιττός), η διάμεσος θα είναι

$$\delta = t_3 = f(4) = \ln 4 - \frac{4}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

$$\begin{aligned} \beta. \Omega &= \{1, 2, 3, \dots, 100\} \\ A &= \{\lambda \in \Omega / R + \delta < -2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R + \delta < -2 &\Leftrightarrow 3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow 3 - \ln 4 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 5) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1, 5) \end{aligned}$$

$$A = \{\lambda \in \Omega / \lambda \in (1, 5)\} = \{2, 3, 4\}$$

$$N(A) = 3 \text{ και } N(\Omega) = 100$$

Αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας άρα :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 0,03 \text{ ή } 3\%$$