

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 20-05-2009

Θέμα 1°

A. Θεώρημα σχ. βιβλίου σελ. 251

B. Ορισμός σχ. βιβλίου σελ. 213

- Γ. α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

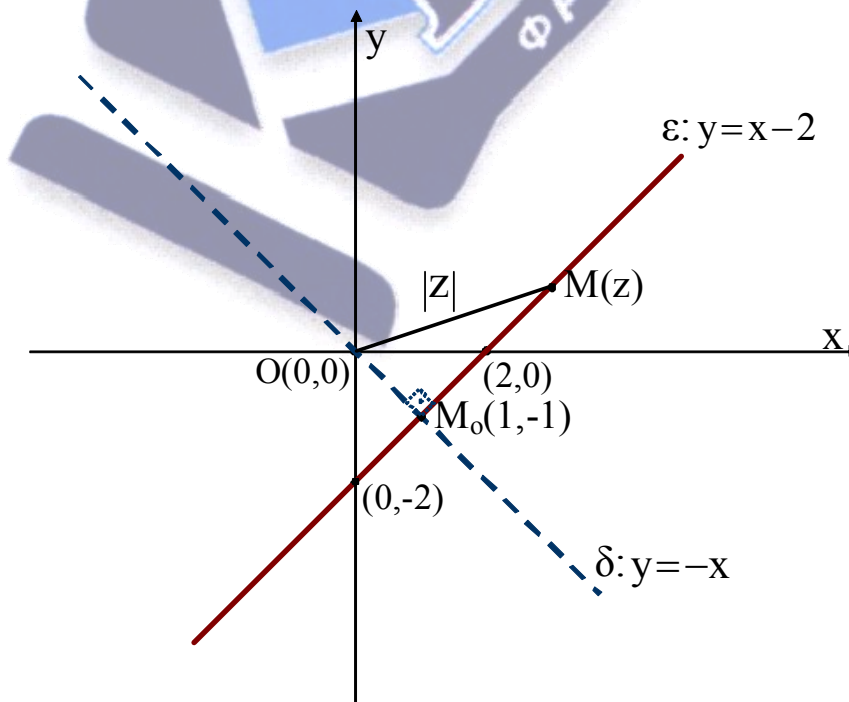
Θέμα 2°

A. α. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i \Leftrightarrow x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{x-1}{2} \\ y = 2 \cdot \frac{x-1}{2} - 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = x - 2$$

άρα η ευθεία στην οποία κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών έχει εξίσωση $\varepsilon: y = x - 2$

β.



Αφού οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $\varepsilon: y = x - 2$ και το $|z| = (OM) =$ απόσταση της εικόνας του z από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, για να βρούμε τον

z_0 για τον οποίο $|z_0| = \min$ πρέπει να βρούμε το σημείο $M_0(z_0)$ της ευθείας ε που απέχει από το O ελάχιστη απόσταση. Επομένως, θα φέρουμε από το O ευθεία $\delta \perp \varepsilon$ και θα βρούμε το σημείο τομής τους.

Η ευθεία δ είναι κάθετη στην ε , άρα ισχύει: $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -1$ και διέρχεται από το $O(0, 0)$, άρα έχει εξίσωση $\delta: y = -x$.

Το σημείο M_0 είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών ε και δ και έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = -x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2 = -x \\ y = -x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 2 \\ y = -x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array} \right\}$$

Άρα $M_0(1, -1)$ και ο μιγαδικός που έχει εικόνα το M_0 είναι ο $z_0 = 1 - i$.

B.

$z_0 = 1 - i$ ο μιγαδικός του προηγούμενου ερωτήματος και $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

Η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = 1 - i \Leftrightarrow |w|^2 + \bar{w} - 13 + i = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 13 + i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + x - 13) + (1 - y)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + x - 13 = 0 \\ 1 - y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + 1 + x - 13 = 0 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -4 \text{ ή } x = 3 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -4 \text{ } y = 1 \\ x = 3 \text{ } y = 1 \end{array} \right\}$$

άρα $w_1 = -4 + i$, $w_2 = 3 + i$

Θέμα 3^ο

A.

$$f(x) = a^x - \ln(x+1), \quad a > 0, a \neq 1$$

$$D_f = (-1, +\infty)$$

Παρατηρώ ότι $f(0) = a^0 - \ln 1 = 1$, άρα η δοσμένη σχέση $f(x) \geq 1$, για κάθε $x > -1$,

γράφεται :

$$f(x) \geq f(0) \text{ για κάθε } x > -1$$

άρα η f στο $0 \in (-1, +\infty)$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως πράξη παραγωγισίμων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = (a^x)' - (\ln(x+1))' = a^x \ln a - \frac{1}{x+1} (x+1)' = a^x \ln a - \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

Επομένως η f παραγωγίζεται και στο 0 , εσωτερικό σημείο του $(-1, +\infty)$, άρα ισχύει το θεώρημα του Fermat, οπότε :

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

B.

α.

Για $\alpha = e$, $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγισίμων με :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \text{ παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγισίμων με :}$$

$$f''(x) = (e^x)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} \cdot (x+1)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x > -1 \quad (2)$$

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $(-1, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(-1, +\infty)$

άρα η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

β.

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(0) = e^0 - \frac{1}{0+1} = 1 - 1 = 0$$

Προφανής ρίζα της $f'(x) = 0$ είναι το 0.

Επειδή $\left. \begin{array}{l} f''(x) > 0 \text{ (από α.) για κάθε } x > -1 \\ \text{η } f'(x) \text{ συνεχής στο } (-1, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f' \uparrow \text{ στο } (-1, +\infty)$

Άρα για τα $x \in (-1, +\infty)$ με $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$ δηλαδή $f'(x) < 0$ στο $(-1, 0)$

ενώ για τα $x \in (-1, +\infty)$ με $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$ δηλαδή $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$

Τελικά

$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ στο } (-1, 0) \\ f(x) \text{ συνεχής στο } (-1, 0] \end{array} \right\} \Rightarrow f \downarrow \text{ στο } (-1, 0]$

$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \\ f(x) \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } [0, +\infty)$

γ. Θεωρώ $h(x) = [f(\beta) - 1](x - 2) + [f(\gamma) - 1](x - 1)$

Ορίζεται στο \mathfrak{R} άρα και στο $[1, 2]$

Είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο \mathfrak{R} άρα και στο $[1, 2]$

$$h(1) = [f(\beta) - 1](1 - 2) + [f(\gamma) - 1](1 - 1) = -[f(\beta) - 1]$$

$$h(2) = [f(\beta) - 1](2 - 2) + [f(\gamma) - 1](2 - 1) = f(\gamma) - 1$$

$$\text{Τότε } h(1)h(2) = -[f(\beta) - 1][f(\gamma) - 1] \quad (1)$$

- $f \downarrow$ στο $(-1, 0)$ άρα ισχύει $f(x) > f(0)$ για κάθε $x \in (-1, 0)$

επομένως $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (-1, 0)$

άρα και $f(x) - 1 > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$

- $f \uparrow$ στο $(0, +\infty)$ άρα ισχύει $f(x) > f(0)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

επομένως $f(x) - 1 > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Τελικά: $f(x) - 1 > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

επειδή $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} f(\beta) - 1 > 0 \\ f(\gamma) - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow [f(\beta) - 1][f(\gamma) - 1] > 0 \Leftrightarrow -[f(\beta) - 1][f(\gamma) - 1] < 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} h(1)h(2) < 0$$

Άρα ισχύει το Θ. Bolzano για την h στο $[1, 2]$ οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (1, 2)$ τέτοια ώστε:

$$h(\rho) = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} [f(\beta) - 1][\rho - 2] + [f(\gamma) - 1][\rho - 1] = 0 \\ \rho \in (1, 2) \Rightarrow \rho - 1 \neq 0 \text{ και } \rho - 2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{[f(\beta) - 1][\rho - 2]}{(\rho - 2)(\rho - 1)} + \frac{[f(\gamma) - 1][\rho - 1]}{(\rho - 2)(\rho - 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - 1}{\rho - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\rho - 2} = 0$$

Οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ της δοσμένης εξίσωσης

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0 \text{ στο } (1, 2)$$

Θέμα 4^ο

α.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$,

$xf(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως γινόμενο συνεχών,

άρα έχει αρχική την $H(x) = \int_0^x tf(t) dt$, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$,

με $H'(x) = xf(x)$

Η $H(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$, άρα και στο 0, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = H(0) = \int_0^0 tf(t) dt = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$H(x)$, x παραγωγίσιμες κοντά στο 0 και $(x)' = 1 \neq 0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις de l'Hospital, άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} (xf(x)) = 0 \cdot f(0) = 0 \quad (1)$$

$\int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ ως αρχική της συνεχούς f , άρα και συνεχής,

$$\text{οπότε : } \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t) dt = \int_0^0 f(t) dt = 0 \quad (2)$$

Για τα x κοντά στο 0 :

$$G(x) = \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right] \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t)dt + \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 0 - 0 + 3 = 3 \quad (3)$$

Για τα $t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ορίζω

$$g(t) = \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = \frac{1 - (\sqrt{1-t^2})^2}{t^2} = \frac{1 - 1 + t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = \frac{1}{1 + \sqrt{1-t^2}} \quad (4)$$

Τότε :

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) \stackrel{(4)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} \stackrel{(5)}{=} 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \quad (6)$$

Από (3),(6) έχω $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = G(0)$,

άρα η G είναι συνεχής στο 0 .

Επιπλέον η $G(x) = \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$ είναι συνεχής στο $(0, 2]$ ως πράξη συνεχών, άρα τελικά η $G(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

β.

$H(x)$ παρ/μη στο $[0, 2]$ άρα και στο $(0, 2)$

x παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα και στο $(0, 2)$

$\int_0^x f(t)dt$ παρ/μη στο $[0, 2]$ άρα και στο $(0, 2)$

άρα η $G(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ ως πράξη παραγωγισίμων

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{H(x)}{x} \right)' - \left(\int_0^x f(t)dt \right)' + (3)' = \frac{H'(x) \cdot x - H(x) \cdot (x)'}{x^2} - f(x) = \\ &= \frac{xf(x) \cdot x - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 \cdot f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2} \end{aligned}$$

γ. Από υπόθεση $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt = 2\int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow H(2) = 2\int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow \frac{H(2)}{2} = \int_0^2 f(t)dt \quad (1)$$

Θεωρώ την G η οποία είναι : $\begin{cases} \text{από ερώτημα (α): συνεχής στο } [0,2] \\ \text{από ερώτημα (β): παραγωγίσιμη στο } (0,2) \end{cases}$

$G(0) = 3$ από το ερώτημα (α)

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 \stackrel{(1)}{=} \int_0^2 f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt + 3 = 3$$

Άρα $G(0) = G(2)$

Οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο $[0,2]$ οπότε υπάρχει

$\alpha \in (0,2)$ τέτοιο ώστε: $G'(\alpha) = 0 \Rightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$

δ.

A' τρόπος

$\alpha \in (0,2)$ από το προηγούμενο ερώτημα άρα $0 < \alpha < 2$.

Θεωρώ την $G(x)$ και το $[0,\alpha] \subset [0,2)$ στο οποίο η G είναι συνεχής από το ερώτ. (α).

Η $G(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$ επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ από το ερώτ.(β), άρα ισχύει Θ.Μ.Τ.

Οπότε υπάρχει $\xi \in (0,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} = \frac{-\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \quad (1)$$

Όμως από το (β): $G'(x) = \frac{-H(x)}{x^2}$ άρα $G'(\xi) = \frac{-H(\xi)}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} \quad (2)$

Τότε (1) λόγω (2) γίνεται $\frac{-\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$

B' τρόπος

Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x) = G(x) + x \cdot \frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}$ και το $[0,\alpha]$.

Η $G(x)$ είναι συνεχής από (α) ερώτημα στο $[0,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$ από το (β) ερώτημα

$x \cdot \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt$ συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο $[0,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

άρα και στο $(0,\alpha)$ ως πολυωνυμική

άρα η $\varphi(x)$ συνεχής στο $[0,\alpha]$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$ ως πράξη παραγωγίσιμων.

$$\varphi(0) = G(0) + 0 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \int_0^{\alpha} f(t) dt = G(0) = 3$$

$$\varphi(\alpha) = G(\alpha) + \alpha \cdot \frac{\int_0^{\alpha} f(t) dt}{\alpha} = \frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^{\alpha} f(t) dt + 3 + \int_0^{\alpha} f(t) dt = 0 + 3 = 3$$

Άρα $\varphi(0) = \varphi(\alpha)$ οπότε ισχύει το Θ. Rolle για την συνάρτηση φ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\varphi'(x) = G'(x) + (x)' \cdot \frac{\int_0^{\alpha} f(t) dt}{\alpha} = -\frac{H(x)}{x^2} + \frac{\int_0^{\alpha} f(t) dt}{\alpha}$$

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} + \frac{\int_0^{\alpha} f(t) dt}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\int_0^{\alpha} f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot H(\xi) = \xi^2 \cdot \int_0^{\alpha} f(t) dt \Leftrightarrow \alpha \cdot \int_0^{\xi} t f(t) dt = \xi^2 \cdot \int_0^{\alpha} f(t) dt$$