ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Β' ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε.

6-5-2009

ΘΕΜΑ 1ο

α. ν = 25 συνδρομητές

- Για τις σχετικές συχνότητες % ισχύει :

$$f_i\% = \frac{v_i}{v}\cdot 100\% = \frac{v_i}{25}\cdot 100\% = v_i \cdot 4\%$$
$$f_1\% = v_1 \cdot 4\% = 4\cdot 4\% = 16\%$$
$$f_2\% = v_2 \cdot 4\% = 6\cdot 4\% = 24\%$$
$$f_3\% = v_3 \cdot 4\% = 5\cdot 4\% = 20\%$$
$$f_4\% = v_4 \cdot 4\% = 7\cdot 4\% = 28\%$$
$$f_5\% = v_5 \cdot 4\% = 2\cdot 4\% = 8\%$$
$$f_6\% = v_6 \cdot 4\% = 1\cdot 4\% = 4\%$$
$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% + f_6\% = 100\%$$

- Οι αθροιστικές συχνότητες N_i είναι :

$$N_1 = v_1 = 4$$
$$N_2 = N_1 + v_2 = 4 + 6 = 10$$
$$N_3 = N_2 + v_3 = 10 + 5 = 15$$
$$N_4 = N_3 + v_4 = 15 + 7 = 22$$
$$N_5 = N_4 + v_5 = 22 + 2 = 24$$
$$N_6 = N_5 + v_6 = 24 + 1 = 25 = v$$

- Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$ είναι :

$$F_1\% = f_1\% = 16\%$$
$$F_2\% = F_1\% + f_2\% = (16 + 24)\% = 40\%$$
$$F_3\% = F_2\% + f_3\% = (40 + 20)\% = 60\%$$
$$F_4\% = F_3\% + f_4\% = (60 + 28)\% = 88\%$$
$$F_5\% = F_4\% + f_5\% = (88 + 8)\% = 96\%$$
$$F_6\% = F_5\% + f_6\% = (96 + 4)\% = 100\%$$

- Τα γινόμενα $x_i \cdot v_i$ είναι :

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$x_1 \cdot v_1 = 2 \cdot 4 = 8$ $\qquad$ $x_4 \cdot v_4 = 5 \cdot 7 = 35$

$x_2 \cdot v_2 = 3 \cdot 6 = 18$ $\qquad$ $x_5 \cdot v_5 = 6 \cdot 2 = 12$

$x_3 \cdot v_3 = 4 \cdot 5 = 20$ $\qquad$ $x_6 \cdot v_6 = 7 \cdot 1 = 7$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot v_i = 8 + 18 + 20 + 35 + 12 + 7 = 100$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

i	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i v_i$
1	2	4	16	4	16	8
2	3	6	24	10	40	18
3	4	5	20	15	60	20
4	5	7	28	22	88	35
5	6	2	8	24	96	12
6	7	1	4	25	100	7
	Αθροίσματα	25	100			100

β. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i v_i}{v} = \dfrac{100}{25} = 4$ κλήσεις

γ. Το πολύ 4 κλήσεις πραγματοποίησαν :

$v_1 + v_2 + v_3 = N_3 = 15$ συνδρομητές

δ. Τουλάχιστον 5 κλήσεις πραγματοποίησε το :

$f_4\% + f_5\% + f_6\% = (28 + 8 + 4)\% = 40\%$ των συνδρομητών

ΘΕΜΑ 2ο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x - 6}, & x > 6 \\ 3\lambda - 5, & x = 6, \\ e^{x-6}(2x - \mu), & x < 6 \end{cases} \qquad \text{όπου } \lambda, \mu \in \Re$$

α. $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} \left(\dfrac{x^2 - 8x + 12}{x - 6} \right)$, απροσδιόριστη μορφή, οπότε :

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 6} = \frac{(x-6)(x-2)}{x - 6} = x - 2$$

$$\lim_{x \to 6^+} f(x) = \lim_{x \to 6^+} (x - 2) = 6 - 2 = 4$$

β. $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-}\left[e^{x-6}(2x-\mu)\right] = e^{6-6}(2\cdot 6-\mu) = e^0(12-\mu) = 12-\mu$

γ. Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$ πρέπει :

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = \lim_{x\to 6^-} f(x) \Leftrightarrow 4 = 12-\mu \Leftrightarrow \mu = 12-4 \Leftrightarrow \mu = 8$$

Άρα για μ = 8, ισχύει : $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = 4$

δ. Για να είναι η f συνεχής στο x = 6, πρέπει :

$$\lim_{x\to 6} f(x) = f(6) \Leftrightarrow 4 = 3\lambda - 5 \Leftrightarrow 3\lambda = 4+5 \Leftrightarrow 3\lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$, με $x \in \Re$

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με :

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{e^x}\right)' = \frac{(x-2)'\cdot e^x - (x-2)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{\left[(x)'-(2)'\right]\cdot e^x - (x-2)\cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x - (x-2)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x\cdot(1-x+2)}{(e^x)^2} = \frac{3-x}{e^x}$$

β. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 3-x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{e^x} > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{e^x} < 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 3-x < 0 \Leftrightarrow x > 3$$

- Η $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 3)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 3]$.
- Η $f'(x) < 0$ στο $(3, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

γ. Με βάση τα παραπάνω, ο πίνακας μεταβολών είναι :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
f(x)	↗	μέγιστο	↘

Αφού ισχύουν :

$$\left.\begin{array}{l} f'(3)=0 \\ f'(x)>0 \text{ στο } (-\infty,3) \\ f'(x)<0 \text{ στο } (3,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{η f παρουσιάζει μέγιστο στο } x=3\text{, το :}$$

$f(3)=\dfrac{3-2}{e^3}=\dfrac{1}{e^3}$, το οποίο είναι ολικό μέγιστο της f γιατί το 3 είναι η μοναδική ρίζα της f' και το πεδίο ορισμού της f είναι το $\Re$.

ΘΕΜΑ 4ο

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-kx^2+\lambda x-2-\lambda$,   όπου κ, $\lambda\in\Re$ και $x\in\Re$

α. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο M(0, – 5), θα ισχύει :

$$f(0)=-5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 0^3-k\cdot 0^2+\lambda\cdot 0-2-\lambda=-5 \Leftrightarrow -2-\lambda=-5 \Leftrightarrow \lambda=-2+5 \Leftrightarrow$$
$$\lambda=3$$

Για λ = 3, η συνάρτηση γράφεται :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+3x-2-3 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+3x-5$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με :

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-kx^2+3x-5\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(kx^2\right)'+(3x)'-(5)'=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-k\cdot 2x+3\cdot 1-0=x^2-2kx+3$$

Αφού η f για x = 1 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, από το θεώρημα του Fermat, θα ισχύει :

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 1^2-2k\cdot 1+3=0 \Leftrightarrow 1-2k+3=0 \Leftrightarrow 2k=4 \Leftrightarrow k=2$$

β. Για k = 2 και λ = 3 :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$$
$$f'(x)=x^2-4x+3$$

i. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array} \right.$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		–	+
$f(x)$	↗		↘	↗
		τ.μ.	τ.ε.	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[3, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

ii. Η f παρουσιάζει :

- Τοπικό μέγιστο στο x = 1, το f(1) :

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = \frac{1}{3} - 2 + 3 - 5 = \frac{1}{3} - 4 = \frac{1}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$$

- Τοπικό ελάχιστο στο x = 3, το f(3) :

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 5 = 9 - 18 + 9 - 5 = -5$$