ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχ. βιβλίο, σελ. 30
Α2. Ορισμός σχ. βιβλίο, σελ. 13
Α3. Ορισμός σχ. βιβλίο, σελ. 139
Α4. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$v = 60$
Χ: "βαθμολογία"
$t_{min} = 10$
$t_{max} = 20$
$\kappa = 5$ κλάσεις

Β1. $R = t_{max} - t_{min} = 20 - 10 = 10$

$$c = \frac{R}{\kappa} = \frac{10}{5} = 2$$

οι κλάσεις θα είναι:

$[10-12)$

$[12-14)$

$[14-16)$

$[16-18)$

$[18-20)$

Με κεντρικές τιμές:

$$x_1 = \frac{10+12}{2} = 11$$

$x_2 = x_1 + c = 11 + 2 = 13$

$x_3 = x_2 + c = 13 + 2 = 15$

$x_4 = x_3 + c = 15 + 2 = 17$

$x_5 = x_4 + c = 17 + 2 = 19$

από τα δεδομένα προκύπτουν τα εξής:

- $\alpha_3^{\circ} = 144^{\circ}$ (1)

- $f_1 = f_2 \quad (2)$
- $v_1 + v_2 + v_3 = 48 \quad (3)$
- $\boxed{v_5 = 6}$

$(1) \Leftrightarrow f_3 \cdot 360^\circ = 144^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{144}{360} \Leftrightarrow f_3 = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \boxed{f_3 = 0,4}$

$f_3\% = f_3 \cdot 100\% \Leftrightarrow f_3\% = 40\%$

$f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v_3 = f_3 \cdot v = 0,4 \cdot 60 \Leftrightarrow \boxed{v_3 = 24}$

$(2) \Leftrightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_1 = v_2 \qquad (4)$

$(3) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} v_1 + v_1 + 24 = 48 \Leftrightarrow 2v_1 = 24 \Leftrightarrow v_1 = 12$

$(4) \Leftrightarrow v_2 = 12$

$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{12}{60} \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow f_1 = 0,2$

$(2) \Leftrightarrow f_2 = 0,2$

$f_1\% = f_2\% = f_1 100\% = 0,2 \cdot 100 \Leftrightarrow f_1\% = f_2\% = 20\%$

$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \Leftrightarrow v_4 = v - (v_1 + v_2 + v_3 + v_5) \Leftrightarrow v_4 = 60 - (12 + 12 + 24 + 6) \Leftrightarrow$

$v_4 = 60 - 54 \Leftrightarrow \boxed{v_4 = 6}$

$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{f_4 = 0,1}$

$f_4\% = f_4 \cdot 100\% = 0,1 \cdot 100 \Leftrightarrow \boxed{f_4\% = 10\%}$

και αφού και $v_5 = 6$ προκύπτει: $f_5 = 0,1$, $f_5\% = 10\%$
άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Βαθμολογία $[-)$	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	$f_i\%$
$[10-12)$	11	12	0,2	20
$[12-14)$	13	12	0,2	20
$[14-16)$	15	24	0,4	40
$[16-18)$	17	6	0,1	10
$[18-20)$	19	6	0,1	10
Σύνολο	—	60	1	100

Β2.

$x_1 \cdot v_1 = 11 \cdot 12 = 132$
$x_2 \cdot v_2 = 13 \cdot 12 = 156$
$x_3 \cdot v_3 = 15 \cdot 24 = 360$
$x_4 \cdot v_4 = 17 \cdot 6 = 102$
$x_5 \cdot v_5 = 19 \cdot 6 = 114$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i = 132 + 156 + 360 + 102 + 114 = 864$$

άρα η μέση τιμή θα είναι: $\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i = \frac{864}{60} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 14,4}$

Β3. Βαθμολογία από 10 έως 14 πήραν $v_1 + v_2 = 12 + 12 = \boxed{24 \text{ μαθητές}}$

Β4. Το 17 είναι η κεντρική τιμή της $4^{ης}$ κλάσης οπότε βαθμολογία τουλάχιστον 17 αντιστοιχεί στη μισή $4^{η}$ κλάση και όλη την $5^{η}$.
Αφού οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα (και συμμετρικά) κατανεμημένες σε κάθε κλάση, το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\frac{f_4\%}{2} + f_5\% = \frac{10\%}{2} + 10\% = \boxed{15\% \text{ των μαθητών}}$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$A = \{\omega_1, \omega_3\}$

$B = \{\omega_2, \omega_4\}$

$P(A-B) = \frac{v+1}{v+4}$
, ν: θετικός ακέραιος
$P(B-A) = \frac{v-1}{2v}$

Γ1. $(A-B) = \{\omega_1, \omega_3,\} = A$
άρα: $P(A-B) = P(A)$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

$A \cap B = \varnothing$, οπότε $P(A \cap B) = 0$
άρα $P(A-B) = P(A) - P(A-B) \Leftrightarrow P(A-B) = P(A)$
Ομοίως:
$B - A = \{\omega_2, \omega_4\} = B$
άρα: $P(B-A) = P(B)$ **ή** $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)$

Γ2. Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας ισχύει:
$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \qquad (1)$

$P(A-B) = P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{v+1}{v+4} \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{v+1}{v+4} \qquad (2)$

$$P(B-A)=P(B) \Leftrightarrow P(B)=\frac{\nu-1}{2\nu} \Leftrightarrow P(\omega_2)+P(\omega_4)=\frac{\nu-1}{2\nu} \qquad (3)$$

$$(1)\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}} \frac{\nu+1}{\nu+4}+\frac{\nu-1}{2\nu}=1 \Leftrightarrow 2\nu(\nu+1)+(\nu+4)(\nu-1)=2\nu(\nu+4)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2\nu^2}+2\nu+\nu^2-\nu+4\nu-4=\cancel{2\nu^2}+8\nu$$

$$\Leftrightarrow \nu^2-3\nu-4=0 \Leftrightarrow (\nu+1)(\nu-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\nu=-1 \text{ ή } \nu=4 \\ \text{όμως } \nu\in Z^+\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\nu=4}$$

Γ3.

$$P(A)=\frac{\nu+1}{\nu+4}=\frac{4+1}{4+4} \Leftrightarrow \boxed{P(A)=\frac{5}{8}}$$

$$P(B)=\frac{\nu-1}{2\nu}=\frac{4-1}{2\cdot 4} \Leftrightarrow \boxed{P(B)=\frac{3}{8}}$$

Γ4. $A'\cup B'=(A\cap B)'$

άρα $P(A'\cup B')=P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)=1-0=1$

δηλαδή: $\boxed{P(A'\cup B')=1=P(\Omega)}$

<u>2ος τρόπος</u>

$A'=\{\omega_2,\omega_4\}=B$ οπότε: $A'\cup B'=B\cup B'=\Omega$ άρα: $P(A'\cup B')=P(\Omega)=1$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f(t)=\frac{1}{300s^2}(t-\bar{x})^3, \quad t\in\Re, \ s\neq 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με:

$$f'(t)=\frac{1}{300s^2}\left((t-\bar{x})^3\right)'=\frac{1}{300s^2}3(t-\bar{x})^2\cdot(t-\bar{x})' \Leftrightarrow$$

$$f'(t)=\frac{1}{100s^2}(t-\bar{x})^2\geq 0 \text{ για κάθε } t\in\Re \left(\text{αφού } \frac{1}{100s^2}>0 \text{ και } (t-\bar{x})^2\geq 0\right)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η f΄. Η $f'(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με:

$$f''(t)=\frac{1}{100s^2}\left((t-\bar{x})^2\right)'=\frac{1}{100s^2}\cdot 2(t-\bar{x})\cdot(t-\bar{x})' \Leftrightarrow$$

$$f''(t)=\frac{1}{50s^2}(t-\bar{x}) \text{ όπου } \frac{1}{50s^2}>0$$

$$f''(t)=0 \Leftrightarrow t-\bar{x}=0 \Leftrightarrow t=\bar{x}$$

$$f''(t)>0 \Leftrightarrow t-\bar{x}>0 \Leftrightarrow t>\bar{x}$$

$$f''(t)<0 \Leftrightarrow t-\bar{x}<0 \Leftrightarrow t<\bar{x}$$

t	$-\infty$	$\bar{x}$	$+\infty$
$f''(t)$	-	0	+
$f'(t)$	↘	$f'(\bar{x})$ ελάχιστο	↗

αφού

$$\left.\begin{aligned} &f'(\bar{x})=0 \\ &f'(t)<0 \ \text{ στο } (-\infty,\bar{x}) \\ &f'(t)>0 \ \text{ στο } (\bar{x},+\infty) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{η } f' \text{παρουσιάζει ελάχιστο στο } t=\bar{x}$$

το ελάχιστο είναι: $f'(\bar{x})=\frac{1}{100s^2}(\bar{x}-\bar{x})^2 \Leftrightarrow f'(\bar{x})=0$

Δ3. $f'(0)=\frac{1}{100s^2}(0-\bar{x})^2=1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{100s^2}=1 \Leftrightarrow$

$\bar{x}^2=100s^2 \Leftrightarrow \frac{s^2}{\bar{x}^2}=\frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{s}{\bar{x}}\right|=\frac{1}{10} \overset{s>0}{\Leftrightarrow} \frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow cv=\frac{1}{10}$

αφού $cv=\frac{1}{10}$ ή 10%, το δείγμα είναι οριακά ομοιογενές.

Δ4. Η μέση τιμή των $f'(t_1),f'(t_2),\ldots,f'(t_\nu)$ είναι:

$$\bar{y}=\frac{f'(t_1)+f'(t_2)+\ldots+f'(t_\nu)}{\nu}=$$

$$=\frac{\frac{1}{100s^2}(t_1-\bar{x})^2+\frac{1}{100s^2}(t_2-\bar{x})^2+\ldots\ldots+\frac{1}{100s^2}(t_\nu-\bar{x})^2}{\nu}=$$

$$=\frac{1}{100s^2}\cdot\frac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+\ldots+(t_\nu-\bar{x})^2}{\nu}=\frac{1}{100s^2}\cdot s^2 \Leftrightarrow \boxed{\bar{y}=\frac{1}{100}}$$