

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 07-07-2009

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 150.

B. α) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 14.
β) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 85.

Γ. α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Δίνεται $f(x) = ax^3 - 8$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$ οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 - 8) = -7 \Leftrightarrow a \cdot 1^3 - 8 = -7 \Leftrightarrow a - 8 = -7 \Leftrightarrow a = 8 - 7 \Leftrightarrow a = 1$$

β. Αφού $a=1$ έχω $f(x) = x^3 - 8$ οπότε

i. Για $x \neq 2$

$$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{x^3 - 8}{x-2} = \frac{x^3 - 2^3}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x-2} = (x^2 + 2x + 4)$$

$$\text{Τότε: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

ii. Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι της μορφής: $y = \lambda x + \beta$.

Το σημείο που έχει τετμημένη $x_0 = 2$, έχει τεταγμένη $y_0 = f(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$.

Συνεπώς ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - 8$ στο σημείο $A(2,0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x^3 - 8)' = 3x^2$ άρα η γραφική της παράσταση

δέχεται εφαπτομένη με κλίση $\lambda = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται $y = 12x + \beta$ και πρέπει να επαληθεύεται από το σημείο $A(2,0)$ συνεπώς:

$$0 = 12 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 0 = 24 + \beta \Leftrightarrow -24 = \beta$$

Τελικά, η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι $y = 12x - 24$.

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Γνωρίζουμε ότι το τόξο α_i ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα

συχνοτήτων δίνεται από τον τύπο $\alpha_i = v_i \cdot \frac{360^\circ}{v}$

Από υπόθεση $\alpha_1 = 50^\circ$ και $\alpha_2 = 30^\circ$

$$\alpha_1 = v_1 \cdot \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow 50^\circ = v_1 \cdot \frac{360^\circ}{72} \Leftrightarrow 50^\circ = v_1 \cdot 5^\circ \Leftrightarrow v_1 = 10$$

και

$$\alpha_2 = v_2 \cdot \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow 30^\circ = v_2 \cdot \frac{360^\circ}{72} \Leftrightarrow 30^\circ = v_2 \cdot 5^\circ \Leftrightarrow v_2 = 6$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $v_4 = 3v_3$ άρα:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Leftrightarrow 10 + 6 + v_3 + 3v_3 = 72 \Leftrightarrow$$

$$4v_3 = 72 - 16 \Leftrightarrow 4v_3 = 56 \Leftrightarrow v_3 = 14$$

$$v_4 = 3v_3 = 3 \cdot 14 = 42$$

β. Για την τιμή x_3 έχουμε: $\alpha_3 = v_3 \cdot \frac{360^\circ}{v} = 14 \cdot \frac{360^\circ}{72} = 14 \cdot 5^\circ = 70^\circ$

Για την τιμή x_4 έχουμε: $\alpha_4 = v_4 \cdot \frac{360^\circ}{v} = 42 \cdot \frac{360^\circ}{72} = 42 \cdot 5^\circ = 210^\circ$

γ. Δίνεται ότι $x_1 < -7$, $x_2 = -7$, $x_3 = 3$, $x_4 > 3$.

Άρα ισχύει $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$R =$ μεγαλύτερη τιμή $-$ μικρότερη τιμή $= x_4 - x_1$

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v}$$

Από τα δεδομένα έχω:

$$t_1 = t_2 = \dots t_{10} = x_1$$

$$t_{11} = t_{12} = \dots t_{16} = x_2$$

$$t_{17} = t_{18} = \dots t_{30} = x_3$$

$$t_{31} = t_{32} = \dots t_{72} = x_4$$

$$\text{άρα } t_{36} = t_{37} = x_4$$

$$\delta = \frac{\text{τιμή 36ης παρατήρησης} + \text{τιμή 37ης παρατήρησης}}{2}$$

διότι $v = 72$ (άρτιος), οπότε η μέση τιμή ισούται με το ημίθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων

$$\text{Άρα } \delta = \frac{x_4 + x_4}{2} = x_4$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην σχέση που ζητείται ναδειχθεί έχουμε:

$$10R + 72\bar{x} = 10(x_4 - x_1) + 72 \frac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4}{v} =$$

$$10(x_4 - x_1) + 72 \frac{10x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 42x_4}{72} =$$

$$10x_4 - 10x_1 + 10x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 42x_4 =$$

$$= 10x_4 + 6x_2 + 14x_3 + 42x_4 = 52x_4 + 6 \cdot (-7) + 14 \cdot 3 = 52x_4 = 52\delta$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = \left(v^3x + \frac{4}{x^2} \right)' = (v^3x)' + \left(\frac{4}{x^2} \right)' = v^3 + 4(x^{-2})' = v^3 + 4 \cdot (-2)x^{-3} = v^3 - \frac{8}{x^3}$$

$x \in (0,1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow v^3 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow v^3 = \frac{8}{x^3} \Leftrightarrow v^3x^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{v^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{v^3}} = \frac{2}{v}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow v^3 - \frac{8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow v^3 > \frac{8}{x^3}, x > 0 \Leftrightarrow v^3x^3 > 8 \Leftrightarrow$$

$$x^3 > \frac{8}{v^3}, x \in (0,1) \Leftrightarrow 1 > x > \frac{2}{v}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow v^3 - \frac{8}{x^3} < 0 \Leftrightarrow v^3 < \frac{8}{x^3}, x \in (0,1) \Leftrightarrow v^3x^3 < 8 \Leftrightarrow$$

$$x^3 < \frac{8}{v^3}, x \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{v}$$

Αφού η $f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{2}{v}\right)$ και η f συνεχής στο $\left[0, \frac{2}{v}\right]$, η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\left[0, \frac{2}{v}\right]$.

Αφού η $f'(x) > 0$ στο $\left(\frac{2}{v}, 1\right)$ και η f συνεχής στο $\left[\frac{2}{v}, 1\right]$, η f είναι γνησίως

αύξουσα στο $\left[\frac{2}{v}, 1\right]$.

β. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	0	$\frac{2}{v}$	1
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↙	↗

ελάχιστο
το $f\left(\frac{2}{v}\right)$

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του κριτηρίου της 1^{ης} παραγώγου:

$$\left. \begin{array}{l} f'\left(\frac{2}{v}\right) = 0 \\ f'(x) > 0 \text{ στο } \left[\frac{2}{v}, 1\right) \\ f'(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{2}{v}\right] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{η } f \text{ παρουσιάζει ελάχιστο στο } x_0 = \frac{2}{v},$$

$$\text{το } f\left(\frac{2}{v}\right) = v^3 \cdot \frac{2}{v} + \frac{4}{\left(\frac{2}{v}\right)^2} = 2v^2 + \frac{4v^2}{4} = 3v^2$$

Αφού η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f για κάθε $x \in (0,1)$ ισούται με $f(x_0) = 3v^2$, από τον ορισμό του ελαχίστου έχουμε ότι $f(x) \geq 3v^2$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Β. α. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{N(A)}{v} \Leftrightarrow P(A) = \frac{v^2 - 9v - 8}{v} \quad (1)$$

Έχουμε ότι:

$$v^3 P(A) + \frac{4}{(P(A))^2} = 3v^2 \xrightarrow{(1)} v^3 \frac{v^2 - 9v - 8}{v} + \frac{4}{\left(\frac{v^2 - 9v - 8}{v}\right)^2} = 3v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2(v^2 - 9v - 8) + \frac{4}{\frac{(v^2 - 9v - 8)^2}{v^2}} = 3v^2 \Leftrightarrow v^2(v^2 - 9v - 8) + \frac{4v^2}{(v^2 - 9v - 8)^2} = 3v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 - 9v - 8 + \frac{4}{(v^2 - 9v - 8)^2} = 3$$

Θέτουμε $v^2 - 9v - 8 = x$ (2) όπου $x = N(A) > 0$ και έχουμε:

$$x + \frac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^3 + 4 = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 - 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0$$

Άρα $x+1=0$ ή $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$ απορ. ή $x=2$

Οπότε η σχέση (2) για $x=2$ δίνει:

$$v^2 - 9v - 8 = 2 \Leftrightarrow v^2 - 9v - 10 = 0 \Leftrightarrow (v-10)(v+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v=10 \text{ ή } v=-1 \text{ απορρ. αφού } v = N(\Omega) \in \mathbb{N}^*$$

Συνεπώς από τη σχέση (1) για $v=10$ προκύπτει η ζητούμενη πιθανότητα, δηλαδή:

$$P(A) = \frac{10^2 - 9 \cdot 10 - 8}{10} = \frac{100 - 98}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Α' τρόπος

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) =$$
$$1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30}{30} - \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{29}{30}$$

Β' τρόπος

$$P(A' \cup B) = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A - B) =$$
$$= 1 - (P(A) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30}{30} - \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{29}{30}$$