ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 09-07-2009

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 224.

Β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 188.

Γ. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

α. Έστω $z = x + yi$

$$(2-i)z+(2+i)\overline{z}-8=0 \Leftrightarrow 2z-iz+2\overline{z}+i\overline{z}-8=0 \Leftrightarrow 2(z+\overline{z})-i(z-\overline{z})-8=0 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot 2x-i2yi-8=0 \Leftrightarrow 4x+2y-8=0 \Leftrightarrow y+2x-4=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ευθεία με εξίσωση $y+2x-4=0$ (1)

β. Έστω $z_1 \in \Re$ άρα $z_1 = x+0i = x$

Τότε οι συντεταγμένες των εικόνων $(x,\ 0)$ ικανοποιούν την (1) άρα

$0+2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ άρα $z_1 = 2+0i$

Έστω $z_2 \in \mathbf{I}$ άρα $z_2 = 0+yi$

Τότε οι συντεταγμένες των εικόνων $(0,y)$ ικανοποιούν την (1) άρα

$y+2\cdot 0-4=0 \Leftrightarrow y=4$ οπότε $z_2 = 0+4i = 4i$

γ.

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)+(z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)=$$

$$(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)+(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=$$

$$z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+z_1\overline{z}_1-z_2\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_2=2z_1\overline{z}_1+2z_2\overline{z}_2=$$

$$2|z_1|^2+2|z_2|^2=2\cdot 4+2\cdot 16=40$$

διότι $z_1=2$ άρα $|z_1|=2\Leftrightarrow |z_1|^2=4$

$z_2=4i$ άρα $|z_2|=4\Leftrightarrow |z_2|^2=16$

ΘΕΜΑ 3^{o}

Α. $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2)=\ln\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2},\ D_f=(-1,+\infty)$

Θεωρώ ότι $x\in(A,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}\right]$$

θέτω $u=\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$

Διακρίνω περιπτώσεις:

1. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}u=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ δεν ανήκει στο $\Re$ άρα απορρίπτεται

2. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}u=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$ δεν ανήκει στο $\Re$ άρα απορρίπτεται

3. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\ell,\ \ell>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to\ell}\ln u=\ln\ell\in\Re$

Άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=\ell$

Αν $\lambda+1>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(\lambda+1)x=+\infty$$

Αν $\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$

τότε $u=\dfrac{0x^2+x+1}{x+2}=\dfrac{x+1}{x+2}$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

Τελικά $\lambda=-1$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Β.

α) Για $\lambda=-1$ έχω: $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x+2)=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$

Η f παραγωγίζεται στο $(-1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων

$$f'(x)=\left(\ln(x+1)\right)'-\left(\ln(x+2)\right)'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}>0 \text{ στο } (-1,+\infty)$$

Η f συνεχής στο $(-1,+\infty)$ άρα η f ↗ στο $(-1,+\infty)$

Σύνολο τιμών $f\left((-1,+\infty)\right)\overset{\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}(-\infty,0)$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]\underset{\substack{x\to-1^+\\ w\to0^+}}{\overset{w=\frac{x+1}{x+2}}{=}}\lim_{w\to0^+}\ln w=-\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]\underset{\substack{x\to+\infty\\ w\to1}}{\overset{w=\frac{x+1}{x+2}}{=}}\lim_{w\to1}\ln w=\ln1=0 \quad (2)$$

β) Η f είναι συνεχής στο $D_f=(-1,+\infty)$ οπότε η ύπαρξη ασύμπτωτων μελετάται στο -1 και στο $+\infty$.

Επειδή έδειξα ότι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\overset{(3)}{=}-\infty$ άρα η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f δεξιά του -1.

Ομοίως έχω δείξει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\overset{(4)}{=}0$ άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ) $f(x)+\alpha^2=0\Leftrightarrow f(x)=-\alpha^2$, Ισχύει $-\alpha^2<0$

Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,0)$ και το $-\alpha^2\in(-\infty,0)$ άρα η εξίσωση $f(x)=-\alpha^2$ έχει λύση στο $(-1,+\infty)$ και είναι μοναδική διότι η f είναι ↗ στο $(-1,+\infty)$ άρα και 1-1

ΘΕΜΑ 4ο

α) $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\quad x\in[0,2]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] οπότε $-2f(x)$ παραγωγίσιμη στο [0, 2].

Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο [0, 2] ,οπότε η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη

στο [0, 2].

e^{2x} είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ άρα και στο [0, 2] ως σύνθεση παραγωγίσιμων

στο $\Re$ συναρτήσεων και $e^{2x}\neq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] ως πράξη παραγωγίσιμων οπότε είναι και συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2)

$$g'(x)=\left(3x^2\right)'-\left[\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}\right]'=6x-\frac{\left[f'(x)-2f(x)\right]'e^{2x}-\left[f'(x)-2f(x)\right]\left(e^{2x}\right)'}{e^{4x}}=$$

$$6x-\frac{\left[f''(x)-2f'(x)\right]e^{2x}-\left[f'(x)-2f(x)\right]2e^{2x}}{e^{4x}}=6x-\frac{e^{2x}\left[f''(x)-2f'(x)-2f'(x)+4f(x)\right]}{e^{4x}}=$$

$$6x-\frac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}}\quad(1)$$

Ισχύει: $g(0)=3\cdot 0^2-\dfrac{f'(0)-2f(0)}{e^0}\overset{\text{υπόθ.}}{=}-\dfrac{2f(0)-2f(0)}{1}=0\quad(2)$

$g(2)=3\cdot 2^2-\dfrac{f'(2)-2f(2)}{e^4}\overset{\text{υπόθ.}}{=}12-\dfrac{2f(2)+12e^4-2f(2)}{e^4}=12-12=0\quad(3)$

Άρα $g(0)=g(2)$

Επομένως πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [0, 2].

β) Αφού ισχύει το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}6\xi-\frac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)}{e^{2\xi}}=0\Leftrightarrow 6\xi e^{2\xi}-\left(f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$6\xi e^{2\xi}-f''(\xi)+4f'(\xi)-4f(\xi)=0\Leftrightarrow 6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)=f''(\xi)+4f(\xi)$$

γ) Από την (1) έχω

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=6x-\dfrac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}} \text{ για κάθε } x\in[0,2] \\ \text{από υπόθεση } f''(x)-4f'(x)+4f(x)=\kappa x e^{2x} \text{ για κάθε } x\in(0,2] \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$g'(x)=6x-\frac{\kappa x e^{2x}}{e^{2x}}=6x-\kappa x=x(6-\kappa)$$

$$g'(x)=x(6-\kappa)\Leftrightarrow g'(x)=\left[\frac{x^2}{2}(6-\kappa)\right]',x\in(0,2]$$

Από 2η συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής ισχύει $g(x)=\dfrac{x^2}{2}(6-\kappa)+c,\ \ x\in(0,2]$

Υπολογίζω το c και το κ

Για $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=\dfrac{0^2}{2}(6-\kappa)+c \\ g(0)=0 \text{ από } (2) \end{array}\right\}\Rightarrow c=0 \qquad \text{Τότε } g(x)=\frac{x^2}{2}(6-\kappa)$$

Για $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} g(2)=\dfrac{2^2}{2}(6-\kappa) \\ g(2)=0 \text{ από } (3) \end{array}\right\}\Rightarrow 2(6-\kappa)=0 \Leftrightarrow \kappa=6 \ \text{ Τότε } g'(x)=x(6-6)=0,\ \ x\in[0,2]$$

Από 1η συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=c_1 \text{ για κάθε } x\in[0,2] \\ g(0)=0 \text{ από } (2) \end{array}\right\}\Rightarrow c_1=0 \ \text{ δηλαδή } g(x)=0 \text{ για κάθε } x\in[0,2]$$

δ) $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\ \ x\in[0,2]$

Από (γ) ερώτημα $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$ άρα

$$3x^2-\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}=0\Leftrightarrow 3x^2=\frac{f'(x)e^{2x}-2e^{2x}f(x)}{e^{4x}}\Leftrightarrow 3x^2=\frac{f'(x)e^{2x}-\left(e^{2x}\right)'f(x)}{e^{4x}}\Leftrightarrow$$

$$\left(x^3\right)'=\left[\frac{f(x)}{e^{2x}}\right]'$$

Από 2η συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

$$x^3+c=\frac{f(x)}{e^{2x}} \text{ για κάθε } x\in[0,2]$$

Οπότε για x = 1 έχω: $1+c=\frac{f(1)}{e^2} \overset{(\upsilon\pi\acute{o}\theta)}{\Leftrightarrow} 1+c=\frac{e^2}{e^2} \Leftrightarrow 1+c=1 \Leftrightarrow c=0$

Τότε $x^3=\frac{f(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow f(x)=x^3e^{2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$

ε)

$f(x)=x^3e^{2x} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x^2}=xe^{2x}$ τότε

$$\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^2 xe^{2x}dx=\int_1^2 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_1^2-\int_1^2(x)'\frac{e^{2x}}{2}dx=$$

$$\frac{2e^4}{2}-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}dx=e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_1^2=e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^4-e^2\right)=$$

$$e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{3e^4}{4}-\frac{e^2}{4}=\frac{e^2\left(3e^2-1\right)}{4}$$