ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΙΟΥ 2010
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 217.

Α.2 Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 149.

Α.3 α. ΣΩΣΤΟ
β. ΛΑΘΟΣ
γ. ΣΩΣΤΟ
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Έστω $z=x+yi$

$$2z-i\bar{z}=3\Leftrightarrow 2(x+yi)-i(x-yi)=3\Leftrightarrow 2x+2yi-xi+yi^2=3\Leftrightarrow$$

$$(2x-y)+(2y-x)i=3\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2x-y=3\\2y-x=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2x-y=3\\x=2y\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}4y-y=3\\x=2y\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}3y=3\\x=2y\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=2\end{cases}$$ άρα $z=2+i$

Β.2 Αφού $z=2+i\Rightarrow |z|^2=2^2+1^2=5$ (1)

$$|w+z|=|z^2|\Leftrightarrow |w+2+i|=|z|^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}|w-(-2-i)|=5$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι κύκλος με κέντρο $K(-2,-1)$ και ρ=5 και έχει καρτεσιανή εξίσωση $(x+2)^2+(y+1)^2=5^2$.

Β.3 $z=2+i$

$$u=\frac{\bar{z}+iz}{\bar{z}-1}=\frac{2-i+i(2+i)}{2-i-1}=\frac{2-i+2i-1}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

Τότε $u^{2010}=i^{2010}=i^{4\cdot 502+2}=(i^4)^{502}\cdot i^2=-1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 $f(x)=x^3+3x+\sigma\upsilon\nu x-2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων στο $\Re$ συναρτήσεων με

$$f'(x)=(x^3)'+(3x)'+(\sigma\upsilon\nu x)'-(2)'=3x^2+3-\eta\mu x=3(x^2+1)-\eta\mu x$$

Ισχύει $x^2+1\geq 1$ για κάθε $x\in\Re\Leftrightarrow 3(x^2+1)\geq 3$ (1) για κάθε $x\in\Re$.

Ισχύει $-1\leq \eta\mu x\leq 1$ για κάθε $x\in\Re\Leftrightarrow -\eta\mu x\geq -1$ (2) για κάθε $x\in\Re$.

(1) + (2) $\Rightarrow 3(x^2+1)-\eta\mu x\geq 3-1\Leftrightarrow 3(x^2+1)-\eta\mu x\geq 2>0$. Δηλαδή

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\Re \\ f \text{ συνεχής στο } \Re \end{array}\right\} \Rightarrow f \nearrow \text{ στο } \Re.$$

Γ.2 Θα βρω το σύνολο τιμών της f για $x\in(0,\pi)$

$$f\left((0,\pi)\right) \overset{f\ \text{γν.αυξ.}}{=} \left(\lim_{x\to0^+} f(x), \lim_{x\to\pi^-} f(x)\right) \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \left(-1,\ \pi^3+3(\pi-1)\right)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0}\left(x^3+3x+\text{συν}x-2\right)=0+\text{συν}0-2=1-2=-1 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi}\left(x^3+3x+\text{συν}x-2\right)=\pi^3+3\pi+\text{συν}\pi-2=\pi^3+3\pi-1-2=$$

$$=\pi^3+3\pi-3=\pi^3+3(\pi-1)>0 \quad (2)$$

Αφού είναι $-1<0,\ \pi^3+3(\pi-1)>0$,το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f όταν $x\in(0,\pi)$, άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο (0, π), Όμως η f είναι $\nearrow$,άρα είναι 1 – 1 οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γ.3
Από το Γ.1 ξέρω ότι η f είναι $\nearrow$ άρα 1 -1

$$f\left(x^2+8\right)=f(6x) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} x^2+8=6x \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=4$$

Γ.4

$$\frac{f(x)+1}{x}=\frac{x^3+3x+\text{συν}x-2+1}{x}=\frac{x^3+3x+\text{συν}x-1}{x}=\frac{x^3+3x}{x}+\frac{\text{συν}x-1}{x}$$

$$\left(x^2+3\right)+\frac{\text{συν}x-1}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to0}\left(x^2+3\right)=3 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\text{συν}x-1}{x}=0 \quad (3)$$

Άρα $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to0}\left[\left(x^2+3\right)+\frac{\text{συν}x-1}{x}\right]\underset{(2)}{\overset{(3)}{=}}\lim_{x\to0}\left(x^2+3\right)+\lim_{x\to0}\frac{\text{συν}x-1}{x}=3+0=3$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 $f(x)=\frac{x^2+3}{x}+2x,\quad x\neq0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ ως πράξη παραγωγίσιμων
Α΄ τρόπος παραγώγισης

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x}\right)'+\left(\frac{3}{x}\right)'+(2x)'=(x)'+3\left(\frac{1}{x}\right)'+2(x)'=1-\frac{3}{x^2}+2=3-\frac{3}{x^2}=\frac{3\left(x^2-1\right)}{x^2}$$

Β΄ τρόπος παραγώγισης

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+3}{x}\right)'+(2x)'=\frac{(x^2+3)'x-(x^2+3)(x)'}{x^2}+2=\frac{2x^2-x^2-3}{x^2}+2=$$

$$=\frac{x^2-3+2x^2}{x^2}=\frac{3(x^2-1)}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3(x^2-1)}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=1 \ \text{ή}\ x=-1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{3(x^2-1)}{x^2}>0\Leftrightarrow x^2-1>0\Leftrightarrow x<-1 \ \text{ή}\ x>1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f'(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	
			-6 τ. μέγιστο				6 τ. ελάχιστο		

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-1)$ και $f'(x)<0$ στο $(-1,0)$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=\frac{(-1)^2+3}{-1}+2(-1)=-4-2=-6$

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(0,1)$ και $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=\frac{1^2+3}{1}+2\cdot 1=6$

Δ.2 $D_f=\Re^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Ελέγχω για κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2+3}{x}+2x\right)\overset{(3)}{\underset{(4)}{=}}-\infty \quad \text{διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \ (1),\quad \lim_{x\to 0}(x^2+3)=3>0 \quad (2) \quad \text{άρα}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+3}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left[(x^2+3)\frac{1}{x}\right]\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}-\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x\to 0}2x=0 \quad (4)$$

Άρα $\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$ οπότε η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αριστερά του 0 και πλησιάζει την C_f καθώς η f παίρνει αρνητικές τιμές.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3}{x}+2x\right)\overset{(4)}{\underset{(6)}{=}}+\infty \quad \text{διότι}$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ (5)

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+3}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(x^2+3\right)\frac{1}{x}\right]\overset{(5)}{\underset{(2)}{=}}+\infty$ (6)

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ οπότε η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f δεξιά του 0 και πλησιάζει την C_f καθώς η f παίρνει θετικές τιμές.

Δ.3 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ άρα και στο 1.
Είναι γνωστό από το Δ.1 ότι $f'(1)=0$ και. $f(1)=6$
Άρα η C_f στο $A\left(1,f(1)\right)$ δέχεται εφαπτομένη με κλίση $f'(1)=0$ και εξίσωση $y-f(1)=f'(1)\left(x-1\right)\Leftrightarrow y-6=0\left(x-1\right)\Leftrightarrow y=6$

Δ.4 $f(1)=6$ $\quad f(3)=\frac{3^2+3}{3}+2\cdot 3=\frac{12}{3}+6=10$ άρα

$A\left(1,f(1)\right)=A\left(1,6\right)$

$B\left(3,f(3)\right)=B\left(3,10\right)$

Η κλίση του $\overrightarrow{AB}$ είναι $\lambda_{\overline{AB}}=\frac{10-6}{3-1}=\frac{4}{2}=2$ (1)

Η ζητούμενη εφαπτομένη, έστω ε είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα AB
άρα έχει κλίση $\lambda_\varepsilon=\lambda_{\overline{AB}}=2$ (1)

Η f παραγωγίζεται στο $\Re^*$ με $f'(x)=\frac{3\left(x^2-1\right)}{x^2}$ άρα παραγωγίζεται και στο ξ, $\xi\in\left(0,+\infty\right)$

οπότε η C_f στο M(ξ,f(ξ)) δέχεται εφαπτομένη με κλίση $\lambda_\varepsilon=f'\left(\xi\right)=\frac{3\left(\xi^2-1\right)}{\xi^2}\overset{(1)}{=}2$

$\frac{3\left(\xi^2-1\right)}{\xi^2}=2\Leftrightarrow 3\left(\xi^2-1\right)=2\xi^2\Leftrightarrow 3\xi^2-3-2\xi^2=0\Leftrightarrow \xi^2=3\Leftrightarrow \xi=\pm\sqrt{3}$

Όμως ξ >0 άρα $\xi=\sqrt{3}$

$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+3}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}=\frac{6}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}=\frac{6\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

Άρα το σημείο $M\left(\xi,f(\xi)\right)=M\left(\sqrt{3},4\sqrt{3}\right)$