ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255 , ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009
FAX: 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. 1. Σχολικό βιβλίο σελ. 279
2. Σχολικό βιβλίο σελ. 229

Β. 1. ΛΑΘΟΣ
2. ΣΩΣΤΟ
3. ΛΑΘΟΣ
4. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α $z_2=(1-i)^2+3i^{2009}+1=1-1-2i+3i^{4\cdot 502+1}+1=-2i+3i+1=1+i$

β. $\overline{z}_1-z_2=\overline{2+3i}-(1+i)=2-3i-1-i=1-4i$

Τότε: $|\overline{z}_1-z_2|=|1-4i|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$

γ. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2+3i}{1+i}=\dfrac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(2+3)+(-2+3)i}{2}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}i$

ΘΕΜΑ 3^{o}

α)

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta, & x\le 1\\ 2x+3, & x>1\end{cases}$$

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$ (1)

αν $x\in(\kappa,1)$: $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(\alpha x^2+\beta)=\alpha+\beta$ (2)

αν $x\in(1,\lambda)$: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$ (3)

$(1)\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}\alpha+\beta=5$

β) Για $\alpha+\beta=5\Leftrightarrow\beta=5-\alpha$ οπότε η f είναι συνεχής, έχω

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+5-\alpha, & x\le 1\\ 2x+3, & x>1\end{cases}$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255 , ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009
FAX: 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ (4)$$

αν $x\in(\kappa,1)$: $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^2+5-\alpha-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^2-\alpha}{x-1}\overset{(6)}{=}\lim_{x\to 1}\alpha(x+1)=2\alpha\ (5)$

διότι για $x\in(\kappa,1)$ ισχύει: $\frac{\alpha x^2-\alpha}{x-1}=\frac{\alpha(x^2-1)}{x-1}=\frac{\alpha(x-1)(x+1)}{x-1}=\alpha(x+1)(6)$

αν $x\in(1,\lambda)$: $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3-5}{x-1}\overset{(7)}{=}\lim_{x\to 1}2=2\ (8)$

διότι για $x\in(1,\lambda)$ ισχύει: $\frac{2x+3-5}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2\ (7)$

$(4)\underset{(7)}{\overset{(5)}{\Rightarrow}}2\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1$

Τότε από την σχέση $\beta=5-\alpha\overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow}\beta=4$

γ) Για $\alpha=1$ και $\beta=4$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4, & x\le 1\\ 2x+3, & x>1\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\frac{x^2+4}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,1]\\ \frac{2x+3}{x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Θεωρώ ότι $x\in(-\infty,A)$ οπότε $g(x)=\frac{x^2+4}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+4}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

Στη συνέχεια βρίσκω το:

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0=\beta$$

Άρα η $y=x$ είναι η ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$

Θεωρώ ότι $x\in(B,+\infty)$ οπότε $g(x)=\frac{2x+3}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

άρα η $y=2$ είναι η ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Θέμα 4ο

I. $f(x)=x^3+\lambda x^2-3x+1$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x)=3x^2+2\lambda x-3$ (1)
Αφού παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$ εσωτερικό σημείο του $\Re$, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, ισχύει θεώρημα Fermat άρα:

$$f'(1)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}3\cdot1^2+2\cdot\lambda\cdot1-3=0\Leftrightarrow2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$$

II. α) Για $\lambda=0$ $f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)\geq0\Leftrightarrow3(x-1)(x+1)\geq0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1+\infty)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f′(x)		+	0	-		+	
f(x)		$\nearrow$	ΤΜ 3	$\searrow$	ΤΕ -1	$\nearrow$	

Στο $(-\infty,-1]$ η f είναι συνεχής, $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-1)$ άρα f $\nearrow$ στο $(-\infty,-1]$
Στο $[-1,1]$ η f είναι συνεχής , $f'(x)<0$ στο $(-1,1)$ άρα η f $\searrow$ στο $[-1,1]$
Στο $[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής, $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ άρα η f $\nearrow$ στο $[1,+\infty)$
Στο $x_0=-1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=-1+3+1=3$
Στο $x_0=1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=1^3-3\cdot1+1=-1$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ άρα σε οποιοδήποτε σημείο $A(x_o,f(x_o))$, η C_f δέχεται εφαπτομένη με κλίση $f'(x_0)=3(x_o^2-1)$
και εξίσωση: $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$
Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την $y=9x$ θα ισχύει:

$f'(x_0)=9\Rightarrow3(x_0^2-1)=9\Leftrightarrow x_0^2-1=3$

$x_o^2=4\Leftrightarrow x_o=2$ ή $x_o=-2$

Για $x_0=-2$

$f(-2)=(-2)^3-3(-2)+1=-8+6+1=-1$

Άρα το σημείο είναι: $A_1(-2,-1)$

Για $x_0=2$

$f(2)=2^3-3\cdot2+1=8-6+1=3$

Άρα το άλλο σημείο είναι το: $A_2(2,3)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:
Στο $A_1: y+1=9(x+2)\Leftrightarrow y=9x+18-1\Leftrightarrow y=9x+17$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255 , ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009
FAX: 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Στο $A_2 : y-3=9(x-2) \Leftrightarrow y=9x-18+3 \Leftrightarrow y=9x-15$

γ) $f(x)=x^3-3x+1$ οπότε $f(x)-\sqrt{x}=x^3-3x+1-\sqrt{x}$

ορίζω μια νέα συνάρτηση $h(x)=x^3-3x-\sqrt{x}+1$ στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $[0,1]$

$h(0)=1$

$h(1)=1-3-1+1=-2$

Άρα $h(0)h(1)<0$ οπότε ισχύει θεώρημα Bolzano επομένως υπάρχει μια τουλάχιστον λύση της $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-\sqrt{x}=0$ στο $(0,1)$