ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 17-05-2010

ΘΕΜΑ Α

Α1.

1^{ος} τρόπος

Οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, ..., t_\nu$ έχουν

μέση τιμή $\bar{x}$.

Οι νέες παρατηρήσεις είναι της μορφής:

$$y_i = t_i - \bar{x}, \quad \text{όπου } i = 1, 2, ..., \nu$$

Σύμφωνα με την εφαρμογή του βιβλίου, η μέση τιμή των y_i θα είναι $\bar{y} = \bar{x} - \bar{x} = 0$

2^{ος} τρόπος

Η μέση τιμή των $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, ..., t_\nu - \bar{x}$ θα είναι:

$$\bar{y} = \frac{t_1 - \bar{x} + t_2 - \bar{x} + ... + t_\nu - \bar{x}}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i - \frac{\nu \cdot \bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Α2. Ο σταθμικός μέσος ορίζεται ως:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$ (Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ.87)

Α3. Ορισμός σχ. βιβλίου σελ. 140

Α4.. α) **ΣΩΣΤΟ**
β) **ΛΑΘΟΣ**
γ) **ΣΩΣΤΟ**
δ) **ΛΑΘΟΣ**
ε) **ΛΑΘΟΣ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, \quad x \in R$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}{x-1}$$

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή ορίου, διότι:

$$\lim_{x\to 1}\left[2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\right] = 2\left(\sqrt{1^2-1+1}-1\right) = 2\cdot(1-1) = 0$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=1-1=0$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$, για κάθε $x\neq 1$.

Τότε: $g(x)=\dfrac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}{x-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}^{\,2}-1^2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$

$=\dfrac{2\left(x^2-x+1-1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}$

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι:

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\dfrac{2\cdot 1}{\sqrt{1^2-1+1}+1}=\dfrac{2}{2}=\boxed{1}$

B2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με $x_0=0$ είναι: $f'(x_0)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως πράξη παραγωγίσιμων, με:

$f'(x)=\left(2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)'=2\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)'-(1)'=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\cdot\left(x^2-x+1\right)'-0=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\cdot\left[\left(x^2\right)'-(x)'+1'\right]=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Άρα: $f'(x_0)=f'(0)=\dfrac{2\cdot 0-1}{\sqrt{0-0+1}}=\dfrac{-1}{1}=-1$

B3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με $x_0=0$ είναι:

$f'(0)=$ εφω, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $x'x$ με $0\le\omega<\pi$

Οπότε: $\text{εφ}\omega=-1\Leftrightarrow \text{εφ}\omega=\text{εφ}\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \text{εφ}\omega=\text{εφ}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, με $0\le\omega<\pi\Leftrightarrow \omega=\dfrac{3\pi}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

Χ : « απώλεια βάρους» σε κιλά
$\nu=160$ άτομα
$\kappa=5$ κλάσεις

Γ1.

Για να βρούμε το ανώτατο όριο της κάθε κλάσης προσθέτουμε στο κατώτερο όριο το c, άρα :

το άνω όριο της $1^{ης}$ κλάσης είναι 0+c = c, τότε : $1^η$ κλάση : [0 – c) με κέντρο

$x_1=\dfrac{0+c}{2}=\dfrac{c}{2}$

$2^η$ κλάση : [c – 2c) με κέντρο $x_2=\dfrac{c+2c}{2}=\dfrac{3c}{2}\Leftrightarrow 6=\dfrac{3c}{2}\Leftrightarrow 3c=12\Leftrightarrow c=4$

Γ2.

Οι κλάσεις θα είναι :

[0 - 4) με κέντρο $x_1 = \frac{4+0}{2} = 2$

[4 - 8) με κέντρο $x_2 = \frac{8+4}{2} = 6$

[8 - 12) με κέντρο $x_3 = \frac{12+8}{2} = 10$

[12 - 16) με κέντρο $x_4 = \frac{16+12}{2} = 14$

[16 - 20) με κέντρο $x_5 = \frac{20+16}{2} = 18$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

i	Απώλεια Βάρους σε κιλά	Κέντρο Κλάσης x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
1	[0 – 4)	2	20	40	80
2	[4 – 8)	6	40	240	1.440
3	[8 – 12)	10	45	450	4.500
4	[12 – 16)	14	30	420	5.880
5	[16 – 20)	18	25	450	8.100
	ΣΥΝΟΛΟ	-	160	1600	20.000

Για τη μέση τιμή υπολογίζουμε τα γινόμενα $x_i v_i$, άρα η μέση τιμή είναι :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 10 \text{ κιλά}}$$

η διακύμανση είναι : $s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{160}\left\{20.000 - \frac{(1600)^2}{160}\right\} =$

$$\frac{20.000}{160} - \left(\frac{1600}{160}\right)^2 = 125 - 10^2 = 125 - 100 = 25$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \boxed{s = 5 \text{ κιλά}}$

Γ3. $CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$ ή $CV = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\% > 10\%$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Γ4.

A : «η απώλεια βάρους ατόμου που επιλέγεται τυχαία είναι από 7 έως 14 κιλά»
Το απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, δηλαδή : $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} \quad (1)$

Το 7 ανήκει στην 2η κλάση και το 14 είναι το κέντρο της 4ης κλάσης, οπότε θέλουμε το $\frac{1}{4}$ της 2 ης κλάσης, όλη την 3 η κλάση και το $\frac{1}{2}$ της 4 ης .

Αφού οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα και συμμετρικά κατανεμημένες σε κάθε κλάση, θα έχουμε :

$$N(A) = \frac{1}{4}\cdot \nu_2 + \nu_3 + \frac{1}{2}\cdot \nu_4 = \frac{1}{4}\cdot 40 + 45 + \frac{1}{2}\cdot 30 = 10 + 45 + 15 = 70$$

$$N(\Omega) = \nu = 160$$

$$(1) \Leftrightarrow P(A) = \frac{70}{160} \Leftrightarrow P(A) = \frac{7}{16}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = \ln\left(x - P(A)\right) - \frac{1}{2}\left(x - P(A)\right)^2 + P(B) \quad x > P(A) \quad \text{με } 0 \le P(A) \le 1$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(P(A), +\infty\right)$, ως πράξη παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = \left(\ln\left(x - P(A)\right)\right)' - \left(\frac{1}{2}\left(x - P(A)\right)^2\right)' + \left(P(B)\right)' =$$

$$= \frac{1}{x - P(A)}\left(x - P(A)\right)' - \frac{1}{2}\cdot 2\left(x - P(A)\right)\left(x - P(A)\right)'$$

$$= \frac{1}{x - P(A)} - \left(x - P(A)\right) = \frac{1 - \left(x - P(A)\right)^2}{x - P(A)},$$

όπου $x - P(A) > 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \left(x - P(A)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - P(A)\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x - P(A) = 1 \\ \text{ή} \\ x - P(A) = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x = 1 + P(A) > P(A), \text{ αφού } 0 \le P(A) \le 1 \\ \text{ή} \\ x = -1 + P(A) \le P(A), \text{ αφού } 0 \le P(A) \le 1 \end{array}\right\}$$

Πρέπει $x > P(A) \ge 0$, οπότε η x_2 απορρίπτεται

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \left(x - P(A)\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - P(A)\right)^2 < 1 \Leftrightarrow \left|x - P(A)\right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < x - P(A) < 1 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} -1 + P(A) < x < 1 + P(A) \\ \text{όμως } x > P(A) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) < x < 1 + P(A)$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

x	P(A)	1 + P(A)	+∞
f′(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

f(1 + P(A))
Μέγιστο

Ισχύει $f'(1+P(A))=0$

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(P(A),1+P(A))$, η f είναι γνησίως αύξουσα $(P(A),1+P(A)]$

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(1+P(A),+\infty)$, η f είναι γνησίως γθίνουσα $[1+P(A),+\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1+P(A)$, ίσο με:

$$f(1+P(A))=\ln(1+P(A)-P(A))-\frac{1}{2}(1+P(A)-P(A))^2+P(B)=\ln 1-\frac{1}{2}+P(B)=P(B)-\frac{1}{2}$$

Δ2.

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=f\left(\frac{5}{3}\right)=0$

Όμως δείξαμε ότι η f παρουσιάζει ένα μόνο ακρότατο (συγκεκριμένα μέγιστο) στο $x_0=1+P(A)$.

Άρα: $\frac{5}{3}=1+P(A)\Leftrightarrow P(A)=\frac{5}{3}-1\Leftrightarrow \boxed{P(A)=\frac{2}{3}}$

Δείξαμε ότι η τιμή του μεγίστου είναι $\left.\begin{array}{l} f(x_0)=P(B)-\frac{1}{2} \\ \text{όμως } f(x_0)=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \boxed{P(B)=\frac{1}{2}}$

Δ3.

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

$(A\cap B)'$:"να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα Α,Β"

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{4+3-5}{6}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Άρα: $P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}\Leftrightarrow \boxed{P\left((A\cap B)'\right)=\frac{2}{3}}$

Δ4. $(A-B)\cup(B-A)$: "να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A,B"

Τα ενδεχόμενα $A-B, B-A$ είναι ασυμβίβαστα άρα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος:

$$P((A-B)\cup(B-A)) = P(A-B)+P(B-A) = P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$= P(A)+P(B)-2P(A\cap B) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}$$

$$\boxed{P((A-B)\cup(B-A)) = \frac{1}{2}}$$