ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
19-05-2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 304
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 279
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 273
Α4. α) **ΣΩΣΤΟ**
β) **ΣΩΣΤΟ**
γ) **ΛΑΘΟΣ**
δ) **ΛΑΘΟΣ**
ε) **ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$$

$$\Delta=4-4\cdot 2=-4 \quad z_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{|-4|}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

Β2.

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}$$

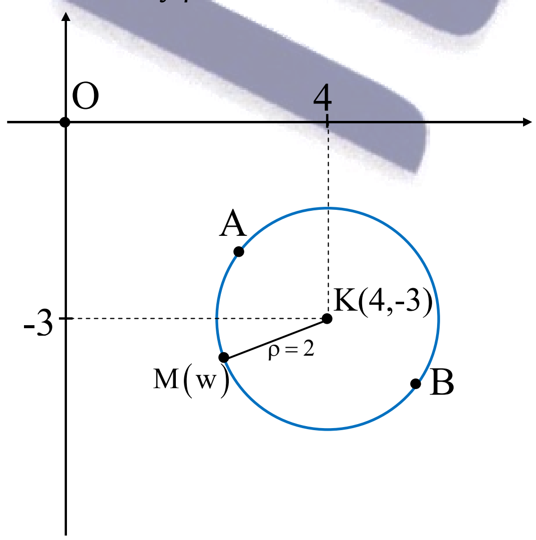
$$=2^{1005}\cdot i^{1005}+(-2)^{1005}\cdot i^{1005}=2^{1005}\cdot i^{1005}-2^{1005}\cdot i^{1005}=0$$

Β3.

$$|z_1-z_2|=|1+i-(1-i)|=|1+i-1+i|=|2i|=2$$

Τότε $|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-4+3i|=2 \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι κύκλος με κέντρο $K(4,-3)$ και ακτίνας $\rho=2$.



ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Β4.

$w = w-4+3i+4-3i = (w-4+3i)+(4-3i)\,(1)$

Γνωρίζω ότι $|w-4+3i| = 2 \quad (2)$ και $|4-3i| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (3)$

οπότε σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα και την (1) έχουμε:

$$\big||w-4+3i|-|4-3i|\big| \le |w| \le |w-4+3i|+|4-3i| \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Leftrightarrow}} |2-5| \le |w| \le 2+5 \Leftrightarrow 3 \le |w| \le 7$$

<u>Γεωμετρική λύση</u>

- $|w-(4-3i)| = 2$

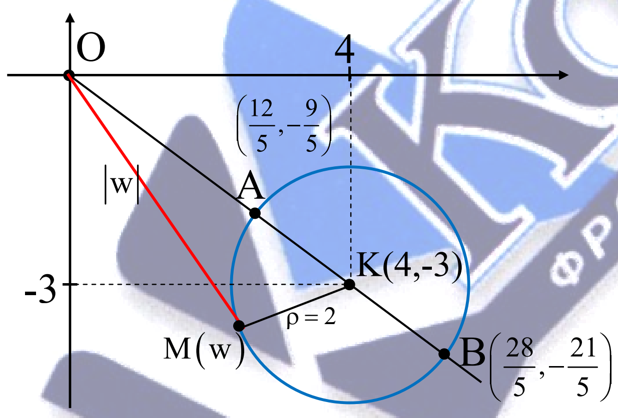
  Αντικαθιστώντας $w = x+yi$ έχουμε:

  $|x+yi-4+3i| = 2 \Leftrightarrow |(x-4)+i(y+3)| = 2 \Leftrightarrow C\!:\ (x-4)^2+(y+3)^2 = 4$

- $$\left.\begin{array}{r} OK\!:\ y = \lambda_{\overrightarrow{OK}}\cdot x \\ \overrightarrow{OK} = (4,-3) \text{ άρα } \lambda_{\overrightarrow{OK}} = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

Η εξίσωση κύκλου C είναι $(x-4)^2+(y+3)^2 = 2^2$

Η εξίσωση της ευθείας ΟΚ είναι $y = -\frac{3}{4}x$



Τα σημεία τομής των C και ΟΚ είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r}(x-4)^2+(y+3)^2 = 4\\ y = -\frac{3}{4}x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}(x-4)^2+\left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2 = 4\\ y = -\frac{3}{4}x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}(x-4)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2(x-4)^2 = 4\\ y = -\frac{3}{4}x\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}\frac{25}{16}(x-4)^2 = 4\\ y = -\frac{3}{4}x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}(x-4)^2 = \frac{2^2\cdot 4^2}{5^2}\\ y = -\frac{3}{4}x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x-4 = \pm\frac{8}{5}\\ y = -\frac{3}{4}x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = \frac{20\pm 8}{5}\\ y = -\frac{3}{4}x\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

- $x_1 = \frac{12}{5}\ ,\ y_1 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5} = -\frac{9}{5}$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366

www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

- $x_2=\frac{28}{5}$, $y_2=-\frac{3}{4}\cdot\frac{28}{5}=-\frac{21}{5}$

Άρα: $A\left(\frac{12}{5},-\frac{9}{5}\right)$ και $B\left(\frac{28}{5},-\frac{21}{5}\right)$.

Όπως είναι γνωστό από τη Γεωμετρία και την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει: $(OA)\le(OM)\le(OB)$

Οπότε:

$$|w|_{min}=(OA)=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(-\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{12^2+9^2}}{5}=\frac{\sqrt{3^2\cdot4^2+3^2\cdot3^2}}{5}=\frac{\sqrt{3^2\cdot\left(4^2+3^2\right)}}{5}=\frac{3\cdot5}{5}=3$$

Συνεπώς: $w_1=\frac{12}{5}-\frac{9}{5}i$ και $|w_1|=3$

$$|w|_{max}=(OB)=\sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2+\left(-\frac{21}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{28^2+(-21)^2}}{5}=\frac{\sqrt{7^2\cdot4^2+3^2\cdot7^2}}{5}=\frac{\sqrt{7^2\cdot\left(4^2+3^2\right)}}{5}$$

$$=\frac{7\cdot5}{5}=7$$

Συνεπώς: $w_2=\frac{28}{5}-\frac{21}{5}i$ και $|w_2|=7$

Τελικά $2\le|w|\le7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=2x+\ln\left(x^2+1\right)$, $D_f=\Re$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως πράξη παραγωγίσιμων

$$f'(x)=(2x)'+\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'=2+\frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)'=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2\left(x^2+1+x\right)}{x^2+1}>0,$$

για κάθε $x\in\Re$

Γ2.

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln(x^4+1)\Leftrightarrow$$

$$2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow f(x^2)=f(3x-2)$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και «1 – 1», άρα:

$$x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=2$$

Γ3. $f(x)=2x+\ln\left(x^2+1\right)$

$$f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}$$

Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως πράξη παραγωγίσιμων

$$f''(x)=\left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)'=(2)'+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=0+2\cdot\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=2\cdot\frac{(x)'\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

ΚΟΡΙΝΘΟΥ 255, ΚΑΝΑΚΑΡΗ 101
ΤΗΛ. 2610 625.360, 2610 624.009,
FAX 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$$= 2\cdot\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\left(-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\left(-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Leftrightarrow -x^2+1>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	
			Σ.Κ		Σ.Κ		

Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη οπότε δέχεται εφαπτομένη για $x=-1,\ x=1$.
Επειδή $f''(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$ και $f''(x)>0$ στο $(-1,1)$ το $A\left(-1,f(-1)\right)$ είναι σημείο καμπής

Επειδή $f''(x)>0$ στο $(-1,1)$ και $f''(x)<0$ στο $(1,+\infty)$ το $A\left(1,f(1)\right)$ είναι σημείο καμπής

$f(1)=2\cdot 1+\ln\left(1^2+1\right)=2+\ln 2$, άρα $A\left(1,2+\ln 2\right)$

$f(-1)=-2+\ln\left[(-1)^2+1\right]=-2+\ln 2$, άρα $B\left(-1,-2+\ln 2\right)$

Γ4.

$$I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1} x\left(2x+\ln(x^2+1)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[2x^2+x\ln(x^2+1)\right]dx=$$

$$\int_{-1}^{1} 2x^2dx+\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)'\ln(x^2+1)dx=$$

$$2\frac{1^3}{3}-2\frac{(-1)^3}{3}+\left[\frac{x^2+1}{2}\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{2}\left(\ln(x^2+1)\right)'dx=$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\left[\frac{x^2+1}{2}\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'dx=\frac{4}{3}+\frac{2}{2}\ln 2-\frac{2}{2}\ln 2-\int_{-1}^{1}xdx$$

$$=\frac{4}{3}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\Re$, όπως και η x, άρα η f(x) – x είναι συνεχής στο $\Re$ και επειδή από υπόθεση $f(x)-x\neq 0$, ορίζεται και είναι συνεχής στο $\Re$ η $\frac{x}{f(x)-x}$, άρα έχει αρχική στο $\Re$ την $F(x)=\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt$, οπότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.

Ακόμα η $x+3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.

$$f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt \Leftrightarrow f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως άθροισμα παραγωγισίμων.

$$f'(x)=(x+3)'+\left(\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt\right)' \Leftrightarrow f'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{f(x)-x+x}{f(x)-x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}$$

Δ2. $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, άρα οι $(f(x))^2$, $xf(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$, ως γινόμενο παραγωγισίμων. Τελικά, η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων.

$$g'(x)=\left[(f(x))^2\right]'-(2xf(x))'=2f(x)f'(x)-2\left[f(x)+xf'(x)\right]=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)$$

$$=2f'(x)(f(x)-x)-2f(x)\overset{(\Delta1)}{=}2\frac{f(x)}{f(x)-x}(f(x)-x)-2f(x)=0$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, άρα και συνεχής, με $g'(x)=0$, για κάθε $x\in\Re$, οπότε $g(x)=c$ για κάθε x

Δ3. Από το Δ2 έχουμε $g(x)=c$, $x\in\Re$.

Άρα για $x=0$: $g(0)=c \Leftrightarrow (f(0))^2-2\cdot 0\cdot f(0)=c$ (1)

Από την υπόθεση : $f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$

Για $x=0$ έχω : $f(0)-0=3+\int_0^0 \frac{t}{f(t)-t}dt \Leftrightarrow f(0)=3$ (2)

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} 9-0=c \Leftrightarrow c=9$. Τελικά $g(x)=9$. Όμως: $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$. Άρα:

$$(f(x))^2-2xf(x)=9 \Leftrightarrow (f(x))^2-2xf(x)+x^2=9+x^2 \Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+9$$

$f(x)-x\neq 0$ και $f(x)-x$ συνεχής στο $\Re$ άρα από συνέπεια θεωρήματος Bolzano η $f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$. Επιπλέον $f(0)=3 \Leftrightarrow f(0)-0=3>0$.
Άρα $f(x)-x>0$ για κάθε $x\in\Re$

$$\left.\begin{array}{l}(f(x)-x)^2=x^2+9\\ f(x)-x>0, x\in\Re\end{array}\right\} \Rightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+9}+x\ ,\ x\in\Re$$

Δ4. Η f είναι συνεχής, άρα έχει αρχική την $G(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, που είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ οπότε και συνεχής.

Τότε $\int_{x}^{x+1} f(t)dt = \left[G(t)\right]_{x}^{x+1} = G(x+1) - G(x)$ (1) και $\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt = G(x+2) - G(x+1)$ (2)

Άρα αρκεί να δείξω ότι :G(x+1) – G(x) < G(x+2) – G(x+1)

Θεωρώ τα διαστήματα [x, x+1], [x+1, x+2] και την G(x). Η G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, οπότε είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα [x, x+1], [x+1, x+2] και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα (x, x+1), (x+1, x+2), οπότε ισχύει για αυτήν Θ.Μ.Τ.

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x,\ x+1), \xi_2 \in (x+1,\ x+2)$ τέτοια, ώστε :

$$G'(\xi_1) = \frac{G(x+1) - G(x)}{x+1-x} = G(x+1) - G(x) \quad (3)$$

$$G'(\xi_2) = \frac{G(x+2) - G(x+1)}{x+2-x-1} = G(x+2) - G(x+1) \quad (4)$$

Όμως $G'(x) = f(x)$

$f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$ παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγισίμων

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2+9}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > 0, \text{για κάθε } x \in \Re$$

ως πηλίκο θετικών.

Διότι :

- Αν $x \geq 0$, $x + \sqrt{x^2+9} > 0$ ως άθροισμα θετικού και μη αρνητικού αριθμού.
- Αν $x < 0$ ισχύει διότι :

$$x + \sqrt{x^2+9} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} > -x \Leftrightarrow x^2+9 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2+9 > x^2 \Leftrightarrow 9 > 0$$

οπότε $x + \sqrt{x^2+9} > 0$ για κάθε $x \in \Re$

προφανώς $\sqrt{x^2+9} > 0$ για κάθε $x \in \Re$

$f'(x) > 0$ στο $\Re$ και f συνεχής στο $\Re$ άρα η f γν. αύξουσα στο $\Re$

$\xi_1 \in (x,\ x+1),\ \xi_2 \in (x+1,\ x+2)$ άρα $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f(\xi_1) < f(\xi_2)$, δηλαδή $G'(\xi_1) < G'(\xi_2) \underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}}$

$$G(x+1) - G(x) < G(x+2) - G(x+1)$$

$$\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} \int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$$