Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

ΚάΠα
συνολική εκπαίδευση

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 65.

Α2) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 16.

Α3) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 22.

Α4) **α** $\rightarrow$ Λάθος
β $\rightarrow$ Σωστό
γ $\rightarrow$ Σωστό
δ $\rightarrow$ Λάθος
ε $\rightarrow$ Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-\frac{\kappa}{x},\ \ x\neq 0,\ \kappa\in\Re$.

$$f'(x)=\left(2-\frac{\kappa}{x}\right)'=(2)'-\left(\frac{\kappa}{x}\right)'=0-\kappa\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{\kappa}{x^2},\ \ x\neq 0,\ \kappa\in\Re.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στη συνάρτηση g(x) έχουμε:

$g(x)=xf'(x)+f(x)=x\cdot\frac{\kappa}{x^2}+2-\frac{\kappa}{x}=\cancel{\frac{\kappa}{x}}+2-\cancel{\frac{\kappa}{x}}=2$, άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Β2) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(3,1) τότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, δηλαδή:

$$f(3)=1\Leftrightarrow 2-\frac{\kappa}{3}=1\Leftrightarrow 1=\frac{\kappa}{3}\Leftrightarrow \boxed{\kappa=3}$$

Β3) Για $\kappa=3$, η συνάρτηση f γίνεται: $f(x)=2-\frac{3}{x},\ \ x\neq 0$, με $f'(x)=\frac{3}{x^2}$.

Ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης, έστω $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$, στο σημείο Β(1,f(1)).

$f(1)=2-\frac{3}{1}=-1$. Δηλαδή στο σημείο $B(1,\ -1)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι: $\alpha=f'(1)=\frac{3}{1^2}=3$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται: $(\varepsilon): y=3x+\beta$. Οι συντεταγμένες όμως του σημείου Β επαληθεύουν την (ε) οπότε: $-1=3+\beta\Leftrightarrow\beta=-4$.

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι $\boxed{y=3x-4}$ (ε).

Β΄ τρόπος:
Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $B(1, f(1))$ θα είναι

(ε): $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-(-1) = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x-3-1 \Leftrightarrow y = 3x-4$

Β4) Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.

- για τον άξονα $y'y$: Για $x=0$ $y = f(0) = 3\cdot 0 - 4 = -4$, οπότε $\Gamma(0,-4)$
- για τον άξονα $x'x$: Για $y=0$, $3x-4=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$, οπότε $\Delta\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Το τρίγωνο ΟΓΔ, του οποίου και το εμβαδόν ζητείται, είναι ορθογώνιο άρα:

$$(\mathrm{O\Gamma\Delta}) = \frac{(\mathrm{O\Gamma})\cdot(\mathrm{O\Delta})}{2} = \frac{4\cdot\frac{4}{3}}{2} = \frac{16}{6} = \boxed{\frac{8}{3}}\text{τ.μ.}.$$

Β5) Από το ερώτημα (Β1) έχουμε ότι: $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} > 0$, για κάθε $x \neq 0$. Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1) Έχουμε τη συνάρτηση θερμοκρασίας $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + \alpha$, $\alpha \in \Re$, $t \in (0,24]$.
Ζητείται η μονοτονία της συνάρτησης θ(t).
Η συνάρτηση θ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,24]$, με

$$\theta'(t) = \left(t - 4\sqrt{t} + \alpha\right)' = (t)' - 4\left(\sqrt{t}\right)' + (\alpha)' = 1 - \frac{4}{2\sqrt{t}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}}$$

$$\theta'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{t}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2}{\sqrt{t}} \overset{\sqrt{t}>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{t} \geq 2 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t \geq 4 \text{ ώρες}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Η θ είναι παραγωγίσιμη στο } (0,4] \\ \theta'(t) < 0 \text{ στο } (0,4)\end{array}\right\} \Rightarrow \theta(t) \text{ είναι γνησ. φθίνουσα στο } (0,4]$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Η θ είναι παραγωγίσιμη στο } [4,24] \\ \theta'(t) > 0 \text{ στο } (4,24)\end{array}\right\} \Rightarrow \theta(t) \text{ είναι γνησ. αύξουσα στο } [4,24]$$

Κάνοντας το πίνακα μεταβολών της συνάρτησης θ(t) έχουμε:

	0	4	24
$\theta'(t)$	-	0	+
$\theta(t)$	↘		↗

Άρα η θερμοκρασία μειώνεται για $t \in (0,4]$, ενώ αυξάνεται για $t \in [4,24]$

Γ2) Από το ερώτημα (Β1) διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση θ παρουσιάζει ελάχιστο για $t = 4$ το θ(4), δηλαδή η θερμοκρασία γίνεται ελάχιστη για $t = 4$ ώρες
Μας δίνεται ότι η ελάχιστη τιμή είναι $-1^o C$, άρα $\theta(4) = -1$.

$\theta(4)=-1 \Leftrightarrow 4-4\sqrt{4}+\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-1-4+8 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=3}$

Γ3) Για $\alpha=3$ έχουμε: $\theta(t)=t-4\sqrt{t}+3,\ t\in(0,24]$.

Ζητούνται οι ώρες όπου

$\theta(t)=0 \Leftrightarrow t-4\sqrt{t}+3=0$

Θέτω $\sqrt{t}=x,\ 0<x\le\sqrt{24}$, οπότε λύνω την εξίσωση: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$

Για $x_1=1 \Leftrightarrow \sqrt{t_1}=1 \Leftrightarrow t_1=1$ ώρες δεκτή

Για $x_2=3 \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3 \Leftrightarrow t_2=9$ ώρες δεκτή

Γ4) $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{\theta'(t)}{t^2-16}=\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{1-\frac{2}{\sqrt{t}}}{t^2-16}$

Θέτω $f(t)=\dfrac{1-\frac{2}{\sqrt{t}}}{t^2-16},\ t\in(0,4)\cup(4,24]$

Ισχύει $\lim\limits_{t\to 4}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right)=0$ και $\lim\limits_{t\to 4}\left(t^2-16\right)=16-16=0$, οπότε έχω απροσδιόριστη μορφή

$$f(t)=\frac{\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}}}{(t-4)(t+4)}=\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}(t-4)(t+4)}=\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-2\right)\left(\sqrt{t}+2\right)(t+4)}=\frac{1}{\sqrt{t}(t+4)\left(\sqrt{t}+2\right)}$$

Άρα $\lim\limits_{t\to 4}f(t)=\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{t}(t+4)\left(\sqrt{t}+2\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{4}(4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)}=\dfrac{1}{2\cdot 8\cdot 4}=\boxed{\dfrac{1}{64}}$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	v_ix_i
[25,)			x			
[,)			$x+20$			
[,)			$2x$			
[,)			x^2-6x	50		
ΣΥΝΟΛΟ	-			-	-	

Δ1) Γνωρίζουμε ότι: $f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%=100 \Leftrightarrow x+x+20+2x+x^2-6x=100 \Leftrightarrow$

$x^2-2x-80=0 \Leftrightarrow x_1=10, x_2=-8$ (απορρ. διότι $x=f_1\%$ και $0\le f_i\%\le 100$)

Οπότε $x=10$ και έτσι από το πίνακα έχουμε τις ακόλουθες σχετικές συχνότητες:

- $\boxed{f_1\%=10}$
- $f_2\%=10+20 \Leftrightarrow \boxed{f_2\%=30}$
- $f_3\%=2\cdot 10 \Leftrightarrow \boxed{f_3\%=20}$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

ΚάΠα
συνολική εκπαίδευση

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

- $f_4\% = 10^2 - 6\cdot 10 = 100 - 60 \Leftrightarrow \boxed{f_4\% = 40}$

Δ2) Δίνεται ότι η διάμεσος είναι 50 χρόνια.

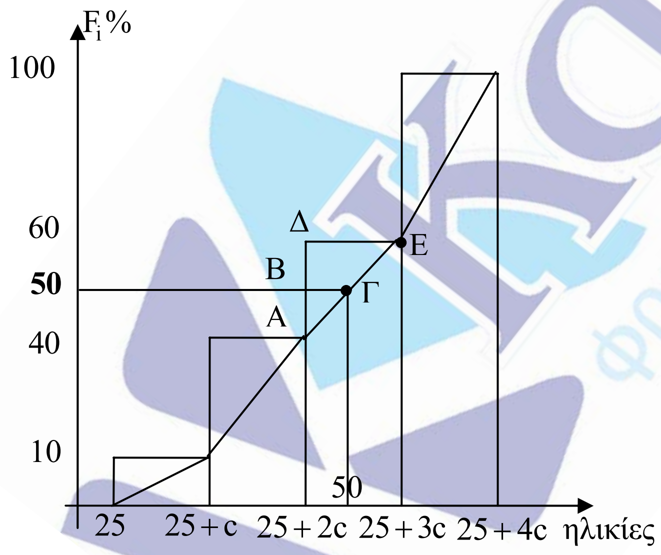
Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος χωρίζει το δείγμα σε δύο ίσα μέρη και συγκεκριμένα είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν.

Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, γνωρίζοντας από το ερώτημα (Γ1) τα εξής δεδομένα:

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	$f_i\%$	$F_i\%$
$[25, 25+c)$	10	10
$[25+c, 25+2c)$	30	40
$[25+2c, 25+3c)$	20	60
$[25+3c, 25+4c)$	40	100
ΣΥΝΟΛΟ	100	-

$F_1\% = f_1\% = 10,\ F_2\% = F_1\% + f_2\% = 10 + 30 = 40,$

$F_3\% = F_2\% + f_3\% = 40 + 20 = 60,\ F_4\% = F_3\% + f_4\% = 60 + 40 = 100$



Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ είναι όμοια (ορθογώνια και γωνία Α κοινή), άρα ισχύει:

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{50-40}{60-40} = \frac{50-25-2c}{c} \Leftrightarrow \frac{10}{20} = \frac{25-2c}{c} \Leftrightarrow c = 50-4c \Leftrightarrow 5c = 50 \Leftrightarrow \boxed{c=10}$$

Δ3) Από το δοσμένο πίνακα έχουμε ότι $N_4 = 50 = \nu$. Έτσι μπορούμε να βρούμε τις συχνότητες ν_i, $i = 1,2,3,4$

Ισχύει: $f_i\% = \dfrac{\nu_i}{\nu}\cdot 100\% \Leftrightarrow f_i\% = \dfrac{\nu_i}{50}\cdot 100\% \Leftrightarrow f_i\% = \nu_i \cdot 2\% \Leftrightarrow \nu_i = \dfrac{f_i\%}{2\%}$

Οπότε: $\nu_1 = \dfrac{10}{2} = 5,\ \nu_2 = \dfrac{30}{2} = 15,\ \nu_3 = \dfrac{20}{2} = 10,\ \nu_4 = \dfrac{40}{2} = 20$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Οι κεντρικές τιμές x_i είναι:

$$x_1 = \frac{25+35}{2} = 30,\quad x_2 = x_1 + c = 30 + 10 = 40,\quad x_3 = x_2 + c = 40 + 10 = 50,\quad x_4 = x_3 + c = 50 + 10 = 60$$

$$N_1 = \nu_1 = 5,\ N_2 = N_1 + \nu_2 = 5 + 15 = 20,\ N_3 = N_2 + \nu_3 = 20 + 10 = 30,\ N_4 = 50$$

Ο δοσμένος πίνακας συμπληρωμένος είναι ο εξής:

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$\nu_i x_i$
$[25,35)$	30	5	10	5	10	150
$[35,45)$	40	15	30	20	40	600
$[45,55)$	50	10	20	30	60	500
$[55,65)$	60	20	40	50	100	1200
ΣΥΝΟΛΟ	-	50	100	-	-	2450

Έτσι για τη μέση τιμή $\bar{x}$ των ηλικιών έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{2450}{50} = 49 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 49} \text{ χρόνια}$$

Δ4) Έστω ν_1' το πλήθος των εργαζομένων από τη πρώτη κλάση που απαιτούνται ώστε η νέα μέση τιμή να είναι $\bar{x}' = 40$ χρόνια. Τότε έχουμε:

$$\bar{x}' = \frac{x_1\left(\nu_1 + \nu_1'\right) + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu + \nu_1'} = \frac{x_1\nu_1 + x_1\nu_1' + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu + \nu_1'} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}' = \frac{x_1\nu_1' + \sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i}{\nu + \nu_1'} \Leftrightarrow 40 = \frac{30 \cdot \nu_1' + 2450}{50 + \nu_1'} \Leftrightarrow 2000 + 40 \cdot \nu_1' = 30 \cdot \nu_1' + 2450 \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot \nu_1' = 450 \Leftrightarrow \boxed{\nu_1' = 45} \text{ εργαζόμενοι}$$