

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ. ΟΜΑΔΑΣ Α'  
24-5-2011**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.**

Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 84

**A2.**

α → Σωστό

β → Σωστό

γ → Λάθος

δ → Λάθος

ε → Σωστό

**A3.**

α)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

β)  $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$

γ)  $\int_a^a f(x) dx = 0$

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x < 4 \\ a, & \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

•  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} \quad (1)$

•  $\lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 7x + 12) = 4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 4) = 4 - 4 = 0$

άρα απροσδιόριστη μορφή

Για  $x < 4$ :  $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \frac{(x-4)(x-3)}{x-4} = x - 3$

Οπότε:  $(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 3) = 4 - 3 = \boxed{1}$

**B2.**

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \right) - 3 \quad (2)$

- $\lim_{x \rightarrow 4^+} (x - 4) = 4 - 4 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x} - 2) = \sqrt{4} - 2 = 0$

Άρα απροσδιόριστη μορφή.

Για  $x > 4$ :

$$g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \frac{(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} = \frac{\cancel{(x-4)} \cdot (\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}} = \sqrt{x} + 2$$

Οπότε:

$$(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x} + 2) - 3 = (\sqrt{4} + 2) - 3 = \boxed{1}$$

### B3.

Για να είναι η  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 4$ , πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1 \\ f(4) = a \end{array} \right\} \xrightarrow{(3)} \boxed{a = 1}$$

## ΘΕΜΑ Γ

### Γ1.

X: ηλικία (σε έτη)

$n = 40$  εργαζόμενοι

$[ , )$	$K_i$	$v_i$	$K_i \cdot v_i$	$N_i$	$f_i\%$
$[25,35)$	30	7	210	7	17,5
$[35,45)$	40	12	480	19	30
$[45,55)$	50	15	750	34	37,5
$[55,65)$	60	6	360	40	15
<b>Σύνολο</b>	-	<b>40</b>	<b>1800</b>	-	<b>100</b>

Ο πίνακας συμπληρώθηκε ως εξής:

- $K_1 = \frac{25 + 35}{2} = \frac{60}{2} = 30$
- $K_2 = \frac{35 + 45}{2} = \frac{80}{2} = 40$
- $K_3 = \frac{45 + 55}{2} = \frac{100}{2} = 50$
- $K_4 = \frac{55 + 65}{2} = \frac{120}{2} = 60$

- Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων βρίσκουμε τις συχνότητες  $v_i$ . Αφού έχουμε ισοπλατείς κλάσεις το ύψος του κάθε ορθογωνίου ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, άρα:  $v_1 = 7$ ,  $v_2 = 12$ ,  $v_3 = 15$ ,  $v_4 = 6$

- $K_1 \cdot v_1 = 30 \cdot 7 = 210$   
 $K_2 \cdot v_2 = 40 \cdot 12 = 480$   
 $K_3 \cdot v_3 = 50 \cdot 15 = 750$   
 $K_4 \cdot v_4 = 60 \cdot 6 = 360$

- $N_1 = v_1 = 7$   
 $N_2 = N_1 + v_2 = 7 + 12 = 19$   
 $N_3 = N_2 + v_3 = 19 + 15 = 34$   
 $N_4 = N_3 + v_4 = 34 + 6 = 40$

- $f_i \% = \frac{v_i}{v} \cdot 100\% = \frac{v_i \cdot 10\cancel{\theta}}{4\cancel{\theta}} \% = \frac{v_i \cdot 5}{2} \%$

$$f_1 \% = \frac{7 \cdot 5}{2} \% = \frac{35}{2} \% = 17,5\%$$

$$f_2 \% = \frac{12 \cdot 5}{2} \% = 6 \cdot 5\% = 30\%$$

$$f_3 \% = \frac{15 \cdot 5}{2} \% = \frac{75}{2} \% = 37,5\%$$

$$f_4 \% = \frac{6 \cdot 5}{2} \% = 3 \cdot 5\% = 15\%$$

## Γ2.

$$\bar{x} = \frac{K_1 \cdot v_1 + K_2 \cdot v_2 + K_3 \cdot v_3 + K_4 \cdot v_4}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{180\cancel{\theta}}{4\cancel{\theta}} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 45 \text{ \u03b5\u03c4\u03b7}}$$

## Γ3.

Ηλικία τουλάχιστον 45 \u03b5\u03c4\u03b7 \u03b5\u03c7\u03bf\u03bd:  $v_3 + v_4 = 15 + 6 = \boxed{21 \text{ \u03b5\u03c1\u03b3\u03b1\u03b6\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03bf\u03b9}}$

## Γ4.

Ηλικία \u03ba\u03c4\u03c9 \u03c4\u03c9\u03bd 35 \u03b5\u03c4\u03c9\u03bd \u03b5\u03c7\u03b5\u03b9 \u03c4\u03bf:  $f_1 \% = \boxed{17,5 \% \text{ \u03c4\u03c9\u03bd \u03b5\u03c1\u03b3\u03b1\u03b6\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03bd}}$

## \u0398\u0395\u039c\u0391 \u0394

### \u03941.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad x \in \mathfrak{R}$$

Η  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03b3\u03c9\u03b3\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf  $\mathfrak{R}$  \u03c9\u03c3 \u03c0\u03c9\u03bb\u03c5\u03bd\u03c9\u03bc\u03b9\u03ba\u03b7, \u03bc\u03b5:

$$f'(x) = (x^3)' - (6x^2)' + (9x)' + (1)' = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'(x)	+	○	○	+
f(x)	B ↗	↘	↗	

Άρα:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$  και στο  $[3, +\infty)$ .
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, 3]$

### Δ2.

Η f παρουσιάζει:

- Τοπικό μέγιστο στο  $x_1=1$ , το:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = \boxed{5}$$

και

- Τοπικό ελάχιστο στο  $x_2=3$ , το:

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = \boxed{1}$$

### Δ3.

$$I = \int_1^3 f'(x) dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = \boxed{-4}$$

### Δ4.

$$g(x) = 3x^2 - 12x + 9, \quad x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρώ ότι:  $g(x) = f'(x)$

$$E(\Omega) = \int_0^3 |g(x)| dx = \int_0^3 |f'(x)| dx \quad (1)$$

Από ερώτημα (Δ1):  $f'(x) > 0$  στο  $(-\infty, 1)$

και  $f'(x) < 0$  στο  $(1, 3)$

Άρα:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow E(\Omega) &= \int_0^1 f'(x) dx + \int_1^3 -f'(x) dx = [f(x)]_0^1 - I_2 \\ &= f(1) - f(0) + 4 = 5 - 1 + 4 = \boxed{8 \text{ τ.μ.}} \end{aligned}$$