Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

ΚάΠα
συνολική εκπαίδευση

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ(ΟΜΑΔΑΣ Β΄) 14-05-2011

Α1.

Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 152.

Α2.

Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 142.

Α3.

Η σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i ενός δείγματος εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμή ίση με x_i.

Α4.

α) Λ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

Β.

Α: «η μπάλα είναι άσπρη»
Κ: «η μπάλα είναι κόκκινη»
Μ: « η μπάλα είναι μαύρη»

$P(M) = \frac{1}{4}$

$P(A) = 4\lambda^2 \quad ,\lambda \in \Re$

$P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$

Πρέπει: $\left.\begin{matrix} 0 \le P(A) \le 1 \\ 0 \le P(K) \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 0 \le 4\lambda^2 \le 1 \\ 0 \le -5\lambda + \frac{7}{4} \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \lambda^2 \le \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} \le -5\lambda \le -\frac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -\frac{1}{2} \le \lambda \le \frac{1}{2} \\ \frac{7}{20} \ge \lambda \ge \frac{3}{20} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$\lambda \in \left[\frac{3}{20}, \frac{7}{20}\right] \quad (1)$

$64 < N(\Omega) < 72 \quad (2)$

Β1.

Ισχύει:

$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow$

$N(\Omega) = 4N(M),\ N(\Omega), N(M) \in \aleph^*$

Άρα $N(\Omega)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 .

Αφού ισχύει: $64<N(\Omega)<72 \Leftrightarrow 4\cdot 16<N(\Omega)<4\cdot 18$,

το μοναδικό ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 είναι το

$4\cdot 17=68$. Άρα $N(\Omega)=68$

Β2.

$P(M) + P(A) + P(K) = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4} + 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1, & \text{απορ. λόγω (1)} \\ & \frac{1}{4} \end{cases}$

Για $\lambda = \frac{1}{4}$:

$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P(K) = -5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(M) = \frac{1}{4}$

Β3.

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(A) = P(A) \cdot N(\Omega) = \frac{1}{4} \cdot 68 \Leftrightarrow$

$N(A) = 17$

$P(M) = P(A) \Leftrightarrow N(M) = N(A) \Leftrightarrow N(M) = 17$

$P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(K) = P(K) \cdot N(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot 68 \Leftrightarrow$

$N(K) = 34$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

ΚάΠα
συνολική εκπαίδευση

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Β4.

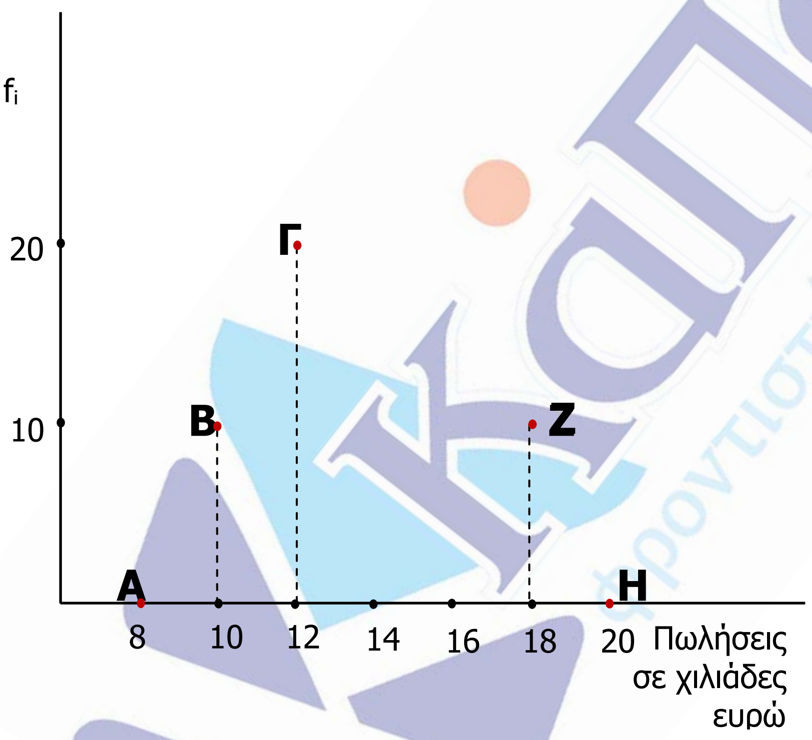
$A \cup M$: "η μπάλα είναι άσπρη ή μαύρη"

$A \cap M = \varnothing$, άρα ισχύει απλός προσθετικός νόμος:

$$P\left(A \cup M\right) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Γ.

X: πωλήσεις(σε χιλιάδες ευρώ)



Α(8, 0)
Β(10, 10)
Γ(12, 20)
Δ(14, $y_Δ$)
Ε(16, $y_Ε$)
Ζ(18, 10)
Η(20, 0)

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Γ1. Τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων και τα σημεία Α, Η είναι τα μέσα των δύο υποθετικών κλάσεων, με μηδενική σχετική συχνότητα, στην αρχή και στο τέλος του ιστογράμματος αντίστοιχα. Άρα οι τετμημένες των σημείων Β, Γ, Δ, Ε, Ζ είναι οι κεντρικές τιμές των κλάσεων και οι τεταγμένες είναι οι σχετικές συχνότητες $f_i\%$ των κλάσεων. Επομένως έχουμε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Αφού $ΔΕ // x'x \Rightarrow y_Δ = y_Ε \quad (1)$

$$\bar{x} = 14{,}2 \text{ χιλιάδες ευρώ} \Leftrightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow$$

Γνωρίζουμε ότι $14{,}2 = 10 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}2 + \dfrac{14 \cdot y_Δ}{100} + \dfrac{16 \cdot y_Ε}{100} + 18 \cdot 0{,}1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$14{,}2 = 1{,}0 + 2{,}4 + 0{,}3 \cdot y_Δ + 1{,}8 \Leftrightarrow$$

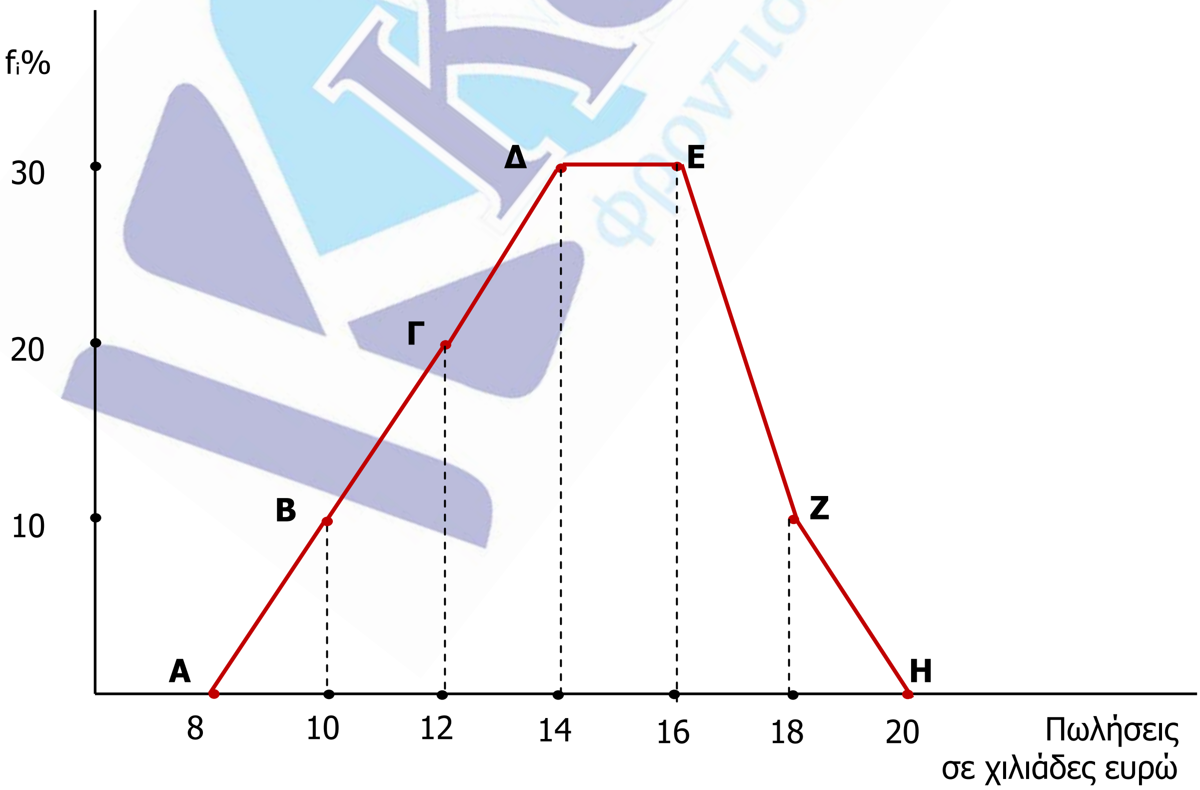
$14{,}2 = 5{,}2 + 0{,}3 \cdot y_Δ \Leftrightarrow 9 = 0{,}3 \cdot y_Δ \Leftrightarrow$

$y_Δ = 30 = y_Ε$ Άρα Δ(14, 30) και Ε(16, 30)

Γ2.

Για να κατασκευάσουμε το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων ενώνουμε τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η με τεθλασμένη γραμμή.

Οπότε έχουμε το ακόλουθο σχήμα:



Γ3. Αν το πλάτος των κλάσεων είναι c, τότε οι κλάσεις θα είναι της μορφής:

$[x,\ x+c)$

$[x+c,\ x+2c)$

$[x+2c,\ x+3c)$

$[x+3c,\ x+4c)$

$[x+4c,\ x+5c)$

Ισχύει:

$$x_1=\frac{x+x+c}{2}\Leftrightarrow 10=\frac{2x+c}{2}\Leftrightarrow 2x+c=20\quad(1)$$

$$x_2=\frac{x+c+x+2c}{2}\Leftrightarrow 12=\frac{2x+3c}{2}\Leftrightarrow$$

$$2x+3c=24\quad(2)$$

$$(2)-(1)\Leftrightarrow 2c=4\Leftrightarrow c=2$$

$$(1)\Leftrightarrow 2x+2=20\Leftrightarrow 2x=18\Leftrightarrow x=9$$

Άρα ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων είναι:

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$
$[9,\ 11)$	10	10
$[11,\ 13)$	12	20
$[13,\ 15)$	14	30
$[15,\ 17)$	16	30
$[17,\ 19)$	18	10
Σύνολο	-	100

Γ4.

Το ποσοστό των πωλητών με τουλάχιστον 15 χιλιάδες ευρώ ετήσιες πωλήσεις από τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων του ερωτήματος Γ3 είναι: $f_4\%+f_5\%=30\%+10\%=40\%$

Γ5.

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων ισούται με το ν, άρα ν = 80 πωλητές.

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Αφού από (Γ4) το ποσοστό των πωλητών με τουλάχιστον 15 χιλ. ευρώ ετήσιες πωλήσεις είναι 40% τότε το αντίστοιχο πλήθος των πωλητών που δικαιούνται εφάπαξ είναι: $\frac{40}{100}\cdot 80 = 32$ πωλητές.

Δ. $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}, x \in \Re$

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως σύνθεση παραγωγισίμων στο $\Re$ συναρτήσεων με:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\left[\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)\right]'$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{11}{10}x^2+\frac{2}{5}x\right)'$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(3x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5}\right)$$

όπου $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)} > 0, \forall x \in \Re$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2-11x+2 = 0$$

$$\Delta = 121-120 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{11\pm 1}{30} < \begin{matrix} \frac{12}{30}=\frac{2}{5}=\frac{6}{15} \\ \frac{10}{30}=\frac{1}{3}=\frac{5}{15} \end{matrix}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$

και στο $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Δ2.

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{3}$, το $f(\frac{1}{3})$
- τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = \frac{2}{5}$, το $f(\frac{2}{5})$

$A \subseteq B$ άρα $P(A) \le P(B)$, όπου $P(A), P(B)$ οι θέσεις των τοπ. ακροτάτων της f, άρα:

$P(A) = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ και $P(B) = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

- αφού $A \subseteq B$ ισχύει $A \cap B = A$, άρα: $P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{3}}$ (1)
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \boxed{P(A - B) = 0}$ (2)
- αφού $A \subseteq B$ ισχύει $A \cup B = B$, άρα:

  $\boxed{P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}}$
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \overset{(1)}{=} \frac{6}{15} - \frac{5}{15} \Leftrightarrow \boxed{P(B - A) = \frac{1}{15}}$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Δ3. $h(x)=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)}, x\in\Re$

α) $f(x)=h(x), x\in\Re \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)}$

$$\overset{e^x:"1-1"}{\Leftrightarrow}\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{11}{30}x+\frac{2}{15}-\frac{3x^2}{10}+\frac{x}{5}+\frac{1}{15}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=0} \text{ ή } \frac{x^2}{30}-\frac{5x}{30}+\frac{6}{30}=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\boxed{x=2} \text{ ή } \boxed{x=3}$$

β) $x_1<x_2<x_3$ άρα: $x_1=0, x_2=2, x_3=3$ τότε:

$v_1=2\cdot 0+1\Leftrightarrow v_1=1$

$v_2=2\cdot 2+1\Leftrightarrow v_2=5$

$v_3=2\cdot 3+1\Leftrightarrow v_3=7$

Αφού γνωρίζουμε τις τιμές x_1, x_2, x_3 των παρατηρήσεων και τις αντίστοιχες συχνότητες, ο τύπος της μέσης τιμής είναι :

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i v_i}{v_1+v_2+v_3}=\frac{0\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 7}{1+5+7}=\boxed{\frac{31}{13}}$$