Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 225
Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 302.
Α3. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z=x+yi$.
Από υπόθεση ισχύει:

$$|z-i|=1+\text{Im}(z) \text{ άρα } |x+(y-1)i|=1+y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=1+y,\quad 1+y\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x^2+(y-1)^2=(1+y)^2 \\ y\geq -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y^2-2y+1=1+y^2+2y \\ y\geq -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2=4y \\ y\geq -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$.

Β2. Έστω $w=x_1+y_1i$ από υπόθεση ισχύει:

$$w(\bar{w}+3i)=i(3\bar{w}+i) \Leftrightarrow w\bar{w}+3wi=3\bar{w}i+i^2 \Leftrightarrow |w|^2+3i(w-\bar{w})+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2+y_1^2+3i2y_1i+1=0 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-6y_1+1=0$$

Παρατηρώ ότι η εξίσωση είναι της γενικής μορφής:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \text{ με } A=0,\quad B=-6,\quad \Gamma=1$$

Ισχύει $0^2+(-6)^2-4=32>0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι κύκλος με κέντρο K(0, 3) και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{32}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

Β3. Έστω $A(x,y)$ η εικόνα του z που ανήκει στην παραβολή $y=\frac{1}{4}x^2$ και $B(x_1,y_1)$ η εικόνα του w που ανήκει στον κύκλο $x_1^2+y_1^2-6y_1+1=0$.

Πρέπει να βρω τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των z , w και οι οποίες συμπίπτουν, αφού πρέπει να ισχύει $z=w$.Άρα ζητώ να βρω τα σημεία που είναι κοινά των 2 γεωμετρικών τόπων άρα θα βρω τις λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2\\ x^2+y^2-6y+1&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2\\ x^2+\frac{x^4}{16}-\frac{6}{4}x^2+1&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2\\ 16x^2+x^4-24x^2+16&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2\\ x^4-8x^2+16&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2\\ \left(x^2-4\right)^2&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2\\ x=2 \ &\text{ή } x=-2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \begin{aligned} &x=2 \;\; y=1, \text{ άρα } A(2,1)\\ &x=-2 \;\; y=1, \text{ άρα } B(-2,1)\end{aligned}$$

Β4. Αφού $K(0, 3)$ $\quad A(2, 1)$ $\quad B(-2,1)$ τότε

$$\overrightarrow{KA}=(x_A-x_K, y_A-y_K)=(2,-2), \qquad \left|\overrightarrow{KA}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{KB}=(x_B-x_K, y_B-y_K)=(-2,-2), \qquad \left|\overrightarrow{KB}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}=(2,-2)\cdot(-2,-2)=2(-2)+(-2)(-2)=-4+4=0$$

Άρα $\overrightarrow{KA}\perp\overrightarrow{KB}$ οπότε $\widehat{AKB}=90^\circ$ δηλ. το ΚΑΒ είναι ορθογώνιο

Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y = 1$ οπότε είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$

στο $M(0,1)$ που είναι μέσο του ΑΒ αφού $\begin{aligned}&\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+(-2)}{2}=0=x_M\\ &\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+1}{2}=1=y_M\end{aligned}$

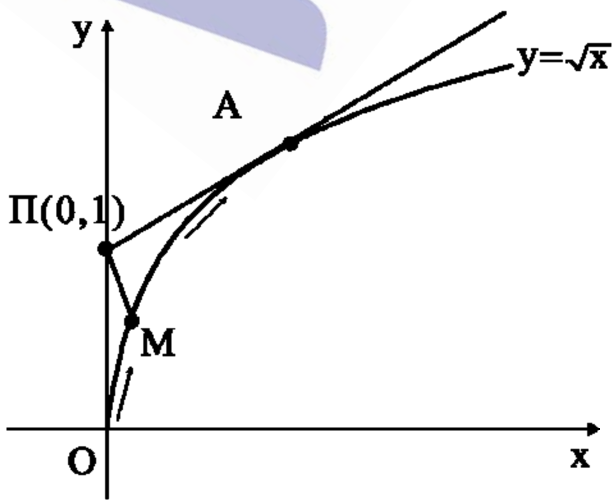
άρα το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω σημείο Λ τέτοιο ώστε ΚΑΛΒ τετράγωνο τότε

$$\left.\begin{aligned}&M=\text{μέσον } AB\\ &\text{και}\\ &M=\text{μέσον } K\Lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} x_M&=\frac{x_K+x_\Lambda}{2}\\ y_M&=\frac{y_K+y_\Lambda}{2}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned} 0&=\frac{0+x_\Lambda}{2}\\ 1&=\frac{3+y_\Lambda}{2}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x_\Lambda&=0\\ 3+y_\Lambda&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned} x_\Lambda&=0\\ y_\Lambda&=-1\end{aligned}\right.$$

Άρα $\Lambda(0, -1)$ που είναι εικόνα του μιγαδικού $u=-i$



$x'(t) = 16m/\min,\quad t \ge 0$ άρα

$x(t) = 16t + c_1,\ \ t \ge 0\ \ (1)$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 16\cdot 0 + c_1 \\ \text{θεωρώ ότι } x(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = c_1 \ \text{ άρα } (1) \to x(t) = 16t,\ \ t \ge 0$$

Δεδομένης της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός, το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π βρίσκονται σε οπτική επαφή όταν στο ευθύγραμμο τμήμα ΜΠ μεταξύ των άκρων Μ και Π δεν παρεμβάλλεται σημείο της καμπύλης c. Άρα το τελευταίο σημείο οπτικής επαφής είναι το σημείο Α οπότε η ΠΑ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Γ2. Έστω $f(x) = \sqrt{x}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Η C_f δέχεται εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο $A\left(x_0, \sqrt{x_0}\right), x_0 > 0$ με κλίση

$f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ και εξίσωση

$$y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x - x_0\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x - \frac{x_0}{2\sqrt{x_0}} + \sqrt{x_0} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2} \quad (1)$$

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το Π(0,1), οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1) άρα

$$1 = \frac{0}{2\sqrt{x_0}} + \frac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x_0} = 2 \Leftrightarrow x_0 = 4$$

Τότε το $A\left(x_0, \sqrt{x_0}\right) = A(4, 2)$

Έστω ότι η απομάκρυνση του Μ από το Ο μέχρι να φτάσει στο Α έγινε σε χρόνο t_1

τότε $x\left(t_1\right) = 4$ όμως από ($Γ_1$) $x\left(t_1\right) = 16t_1$ άρα $16t_1 = 4 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} = 0,25\min$

Γ3. Ω το χωρίο που διαγράφει η ΠΜ όταν το Μ ξεκινά από το Ο και κινείται μέχρι το σημείο Α.

Δημιουργείται από τις κατακόρυφες $x = 0,\ x = 4$, από την εφαπτομένη (ε) και την C_f

(ε) είναι η εφαπτόμενη της C_f στο Α(4,2) άρα η (1) γίνεται

$$y = \frac{1}{2\sqrt{4}}x + \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{που την ονομάζω} \quad g(x) = y = \frac{x}{4} + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x},\ \ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f''(x) = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}} < 0 \ \text{ για } x > 0.$$

Άρα f είναι κοίλη επομένως η εφαπτομένη C_g βρίσκεται πάνω από την C_f άρα

$g(x)-f(x)>0 \quad (2)$

$$E(\Omega)=\int_0^4 |g(x)-f(x)|dx \overset{(2)}{=} \int_0^4 (g(x)-f(x))dx=\int_0^4\left(\frac{x}{4}+1-\sqrt{x}\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^4 xdx+\int_0^4 1dx-\int_0^4 x^{1/2}dx=$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4+[x]_0^4-\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^4=\frac{1}{4}\left(\frac{16}{2}-0\right)+(4-0)-\frac{2}{3}\left(4\sqrt{4}-0\right)=$$

$$=\frac{1}{4}8+4-\frac{2}{3}8=2+4-\frac{16}{3}=\frac{18-16}{3}=\frac{2}{3}\text{ τ.μ.}$$

Γ4. $(\Pi M)=\sqrt{(x-0)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}=d(x),\ x\in[0,4]$

επειδή το σημείο Μ κινείται από το Ο(0,0) έως το Α(4,2)

Η $d(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$d'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}}\cdot\left(x^2+x-2\sqrt{x}+1\right)'=\frac{2x+1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}}=\frac{2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}}$$

Θέτω $h(x)=2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1$ οπότε $d'(x)=\dfrac{h(x)}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}}$

θα βρω το πρόσημο της h(x) στο [0, 4] από το οποίο εξαρτάται το πρόσημο της $d(x)$

$h(0)=-1<0$

$h(4)=2\cdot 4\sqrt{4}+\sqrt{4}-1=17>0$

Άρα $h(0)h(4)<0$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,4)$ τέτοιο ώστε

$h(\rho)=0 \Leftrightarrow d'(\rho)=0$

h παραγωγίζεται στο (0,4) με

$h'(x)=\left(2x^{3/2}+x^{1/2}-1\right)'=2\frac{3}{2}x^{1/2}+\frac{1}{2}x^{-1/2}=3\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in(0,4)$

h συνεχής στο [0,4] άρα h ↗ στο [0,4].

Για τα $x,\rho\in(0,4)$ με $0<x<\rho \overset{\text{h γν. αύξ.}}{\Rightarrow} h(x)<h(\rho)=0$

Δηλαδή $h(x)<0$ στο (0, ρ) άρα $d'(x)<0$ στο (0, ρ)

Για τα x, $\rho\in(0,4)$ με $\rho<x<4 \overset{\text{h γν. αύξ.}}{\Rightarrow} h(x)>h(\rho)=0$

Δηλαδή $h(x)>0$ στο (ρ, 4) άρα $d'(x)>0$ στο (ρ, 4)

x	0		ρ		4
$d'(x)$		−	0	+	
$d(x)$		↘		↗	

Επομένως η d(x) στο $\rho\in(0,4)$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Όμως $x(t)=16t$

Για $t=t_0$ έχουμε ελάχιστο στο ρ άρα $\rho=16t_0 \Leftrightarrow t_0=\dfrac{\rho}{16}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ (αφού είναι 3 φορές παραγωγίσιμη) άρα είναι παραγωγίσιμη και στο 0 οπότε η C_f στο σημείο με τετμημένη 0 δέχεται εφαπτομένη με κλίση $f'(0)$ και εξίσωση:

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - f(0) = f'(0)x$

Πρέπει να βρω τα $f(0), f'(0)$

Ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

Θέτω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ με $\lim_{x\to 0} h(x) = 1 + f(0) \in \Re$ (1) και $f(x) = xh(x)$ τότε

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[xh(x)] \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} h(x) = 0(1+f(0)) = 0$ (2)

Όμως η f είναι συνεχής στο 0 άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = f(0)$ (3)

Ισχύει $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \overset{\text{υπόθεση}}{=} 1 + f(0) \overset{(2)}{=} 1$

Άρα $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης $y - f(0) = f'(0)x$ γίνεται $y - 0 = 1\cdot x \Leftrightarrow y = x$

Δ2. Η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ δηλαδή η $f''(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ άρα $f''(x)$ συνεχής στο $\Re$.

Επιπλέον $f''(x) \neq 0$ στο $\Re$ άρα η $f''(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $\Re$.

Δηλαδή $f''(x) < 0$ ή $f''(x) > 0$ στο $\Re$.

Υποθέτω ότι $f''(x) < 0$ στο $\Re$

Επιπλέον $f'(x)$ συνεχής στο $\Re$ (αφού f' παραγωγίσιμη στο $\Re$) άρα $f' \searrow$ στο $\Re$.

Θεωρώ την f και το $[0,1]$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο (0, 1).

Άρα ισχύει για την f το Θεώρημα Μέσης Τιμής οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0)$ (1)

$\xi \in (0,1)$ άρα $0 < \xi \overset{f'\ \text{γν.φθίν.}}{\Rightarrow} f'(0) > f'(\xi) \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(0) > f(1) - f(0)$ άτοπο αφού από υπόθεση $f'(0) < f(1) - f(0)$

Έτσι απέκλεισα ότι $f''(x) < 0$ στο $\Re$.

Τελικά $f''(x) > 0$ στο $\Re$, επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\Re$ άρα η f είναι κυρτή στο $\Re$.

Δ3. Η f είναι κυρτή στο $\Re$ άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο εκτός από το σημείο επαφής. Αυτό ισχύει και για την εφαπτομένη στο O(0,0) που είναι η y = x.

Δηλαδή $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \Re$ και το = ισχύει μόνο για $x = 0$.

Από υπόθεση $g(x) = f(x) - x$ (1) οπότε $g(0) = f(0) - 0 = 0$ (2)

$f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \Re \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$ για κάθε $x \in \Re \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \Re$.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το g(0) = 0
Επειδή $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$ και το «=» ισχύει για x = 0 έχω ότι
g(x) > 0 για κάθε $x \neq 0$ άρα και για τα x κοντά στο 0.
επιπλέον η $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής ως πράξη συνεχών άρα $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$

τότε $\lim_{x\to 0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ (3),

είναι γνωστό ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ (4)

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x g(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{g(x)}\right] \overset{(3)}{\underset{(4)}{=}} +\infty$

Δ4. Ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$ άρα και για τα $x \in [0,2]$ όμως η $f(x) - x$ δεν είναι παντού 0 στο [0,2] άρα

$$\int_0^2 (f(x) - x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 x dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \left(\frac{4}{2} - 0\right) > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx > 2$$

Δ5. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x = 0 και x = 1 είναι $E(\Omega) = \int_0^1 |g(x)| dx$ (όμως $g(x) \geq 0$ στο [0,1])

Άρα $E(\Omega) = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (f(x) - x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}$ (1)

όμως $E(\Omega) = e - \frac{5}{2}$ (2)

$(1) = (2) \Rightarrow e - \frac{5}{2} = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = e - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = e - 2$ (3)

Αφού η f είναι συνεχής στο $\Re$ έχει αρχική την $F(x) = \int_0^x f(t)dx$ παραγωγίσιμη στο $\Re$ που είναι και συνεχής στο $\Re$ οπότε και στο [1,2]

Θεωρώ την $G(x) = F(x) - 2 = \int_0^X f(t)dt - 2$ που ορίζεται και είναι συνεχής στο [1,2]

$G(1) = \int_0^1 f(t)dt - 2 \overset{(3)}{=} e - 2 - 2 = e - 4 < 0$

$G(2) = \int_0^2 f(t)dt - 2 > 0$ (από το Δ_4)

άρα $G(1)G(2) < 0$ οπότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano για την G στο [1,2]

άρα υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $G(\xi) = 0 \Rightarrow \int_0^\xi f(t)dt - 2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t)dt = 2$