Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

ΚάΠα
συνολική εκπαίδευση

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ(ΟΜΑΔΑΣ Β′) 16-05-2011

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 260-261

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 280

Α3.
α) $\rightarrow$ Σωστό
β) $\rightarrow$ Σωστό
γ) $\rightarrow$ Λάθος
δ) $\rightarrow$ Λάθος
ε) $\rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\bar{z}-\overline{3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow$$

$$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \quad (1)$$

Ο γεωμετρικός τόπος του Μ(z) στο μιγαδικό επίπεδο είναι ΚΥΚΛΟΣ με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα R=1 με εξίσωση $C: x^2+(y-3)^2=1^2$

Β2. Από τη σχέση (1) του ερωτήματος (Β1) έχουμε:

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}-\overline{3i})=1 \Leftrightarrow$$

$$(z-3i)(\bar{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i} \quad (2)$$

Β3.

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} w=(z-3i)+(\bar{z}+3i) \Leftrightarrow w=(z-3i)+\overline{(z-3i)} \Leftrightarrow$$

$$w=2\mathrm{Re}(z-3i) \overset{\text{Αν } z=x+yi\ x,y\ \in\Re}{\Leftrightarrow} w=2\mathrm{Re}(x+yi-3i) \Leftrightarrow w=2\mathrm{Re}(x+(y-3)i) \Leftrightarrow w=2x\in\Re$$

όμως $x^2+(y-3)^2=1$ άρα $0\le x^2\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow -2\le 2x\le 2 \Leftrightarrow$
$-2\le w\le 2$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Γεωμετρικά στον κύκλο C με κέντρο(x_o,y_o) και ακτίνα R ισχύει για κάποιο τυχαίο σημείο Μ(x,y) του C ότι:

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

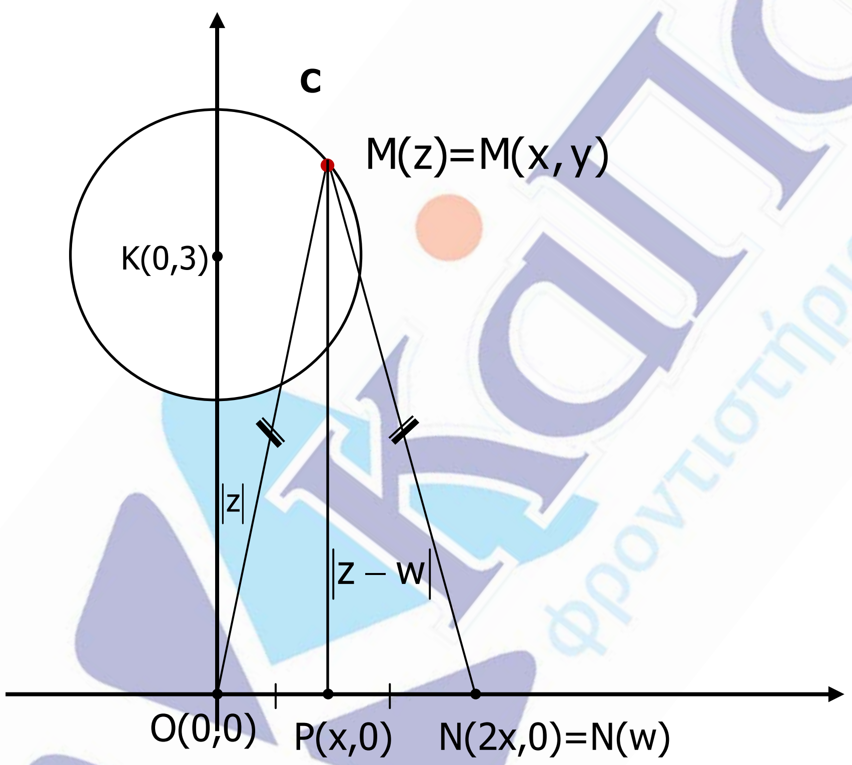
Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$x_o - R \le x \le x_o + R$
$y_o - R \le y \le y_o + R$ άρα εδώ $0-1 \le x \le 0+1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$
οπότε $-2 \le 2x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le w \le 2$

Β4. Από τα δεδομένα έχουμε $w = z - 3i + \dfrac{1}{z-3i}$.

Λόγω του ερωτήματος (Β2):

$$w = z - \cancel{3i} + \bar{z} + \cancel{3i} \Leftrightarrow w = z + \bar{z} \Leftrightarrow -\bar{z} = z - w \Leftrightarrow |-\bar{z}| = |z-w| \overset{|-z|=|z|=|\bar{z}|}{\Leftrightarrow} |\bar{z}| = |z-w| \Leftrightarrow |z| = |z-w|$$



Μπορούμε να δώσουμε και **ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ** λύση αφού:
M(x,y) $\to$ εικόνα του z
O(0,0) $\to$ εικόνα του O
N(2x,0) $\to$ εικόνα του w
P(x,0) $\to$ προβολή του M στον x'x

Αφού MP$\perp$x'x τότε (OP)=(PN). Το τρίγωνο MON είναι ισοσκελές οπότε (MO)=(MN) άρα ισχύει και $|z| = |z-w|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$e^x\left[f'(x)+f''(x)-1\right]=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x-f'(x)-xf''(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\right)'f'(x)+e^xf''(x)-(x)'f'(x)-xf''(x)-\left(e^x\right)'=0\Leftrightarrow\left(e^xf'(x)\right)'-\left(xf'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=0\Leftrightarrow$$

$$\left[e^xf'(x)-xf'(x)-e^x\right]'=0,\ \forall x\in\Re$$

Άρα: $e^xf'(x)-xf'(x)-e^x=c_1, \forall x\in\Re$

$\left(e^x-x\right)f'(x)-e^x=c_1, \forall x\in\Re \quad (1)$

για x=0: $\left(e^0-0\right)f'(0)-e^0=c_1 \overset{f'(0)=0}{\Leftrightarrow} (1-0)\cdot 0-1=c_1\Leftrightarrow c_1=-1$

Τότε η (1) γίνεται: $\left(e^x-x\right)f'(x)-e^x=-1\Leftrightarrow\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x-1 \quad (2)$

Θέτω $g(x)=e^x-x,\ \ x\in\Re$

Η g είναι παρ/μη στο $\Re$ με $g'(x)=e^x-1$

$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq e^0\Leftrightarrow x\geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Παρουσιάζει ελάχιστο το $g(0)=e^0-0=1$ άρα $g(x)\geq g(0)=1>0$ για κάθε $x\in\Re$

δηλαδή $e^x-x>0,\ \forall x\in\Re$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{\left(e^x\right)'-(x)'}{e^x-x}=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\left[\ln\left(e^x-x\right)\right]',\ \forall x\in\Re$$

οπότε $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c_2,\ \forall x\in\Re$

για x=0: $f(0)=\ln\left(e^0-0\right)+c_2 \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} 0=\ln 1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$

Τότε $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ \forall x\in\Re$

Γ2. $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ \ x\in\Re$

K1: Κορίνθου 255
K2: Κανακάρη 101,
K3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

ΚάΠα
συνολική εκπαίδευση

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ απο το ερώτημα (Γ1)

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x-x}\geq 0$ (όμως στο (Γ1) έδειξα ότι $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\Re$)

οπότε αρκεί να λύσω την $e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq e^0 \Leftrightarrow x\geq 0$

επομένως, $f'(x)<0$ για $x<0$ και $f'(x)>0$ για $x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Ελάχιστο το $f(0)$	$\nearrow$

f συνεχής στο $(-\infty,0]$, $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

f συνεχής στο $[0,+\infty)$, $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επομένως, παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$

Γ3.

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ παραγωγίζεται στο $\Re$ ως πηλίκο με

$$f''(x)=\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]'=\frac{(e^x-1)'(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=$$

$$\frac{\cancel{e^{2x}}-xe^x-\cancel{e^{2x}}+e^x+e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{(e^x-x)^2} \qquad (1)$$

Έστω $h(x)=(2-x)e^x-1$, $x\in\Re$ οπότε $f''(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με

$$h'(x)=(2-x)'e^x+(2-x)(e^x)'=-e^x+(2-x)e^x=e^x(2-x-1)=e^x(1-x)$$

$h'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x(1-x)\geq 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\left.\begin{array}{l} \text{η h συνεχής στο } (-\infty,1] \\ \text{η } h'(x)>0 \text{ στο } (-\infty,1) \end{array}\right\} \Rightarrow h \nearrow \text{ στο } (-\infty,1]$

$\left.\begin{array}{l} \text{η h συνεχής στο } [1,+\infty) \\ \text{και } h'(x)<0 \text{ στο } (1,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow h \searrow \text{ στο } [1,+\infty)$

Αφού η h συνεχής στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το:

$h((-\infty,1])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(1)\right]=(-1,e-1]$ διότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x-1\right]$ (2)

έστω $\sigma(x)=(2-x)e^x=\dfrac{2-x}{\frac{1}{e^x}},\quad x\in(-\infty,1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sigma(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-x}{\frac{1}{e^x}}\right)\overset{D.L.H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2-x)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}\cdot(-x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, άρα

Από τη σχέση (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x-\lim\limits_{x\to-\infty}1=0-1=-1$

$h(1)=(2-1)e^1-1=e-1$

Το $0\in(-1,e-1]$ άρα η h(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty,1)$, έστω x_1 και αφού η h(x) είναι $\nearrow$,η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Αφού h συνεχής στο $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα θα έχει σύνολο τιμών το:

$h([1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),h(1)\right]=(-\infty,e-1]$ διότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x)e^x-1\right]=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$h(1)=e-1$

Κ1: Κορίνθου 255
Κ2: Κανακάρη 101,
Κ3: Κανακάρη 99 & Κριτολάου 7
Τηλ. 2610 625.360

Fax. 2610 625.366
www.kapalearn.gr
e-mail: info@kapalearn.gr

Το $0 \in (-\infty, e-1]$ άρα η $h(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$, έστω x_2 και αφού η $h(x)$ είναι $\searrow$ η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Τελικά, η $h(x)$ άρα και η $f''(x)$ έχει 2 ακριβώς ρίζες x_1, x_2 με $x_1 \in (-\infty, 1)$ και $x_2 \in (1,+\infty)$

$x_1 \in (-\infty, 1)$

- για $x < x_1 \overset{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_1) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- για $x_1 < x < 1 \overset{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0$

$h(x) < 0$ στο $(-\infty, x_1)$, άρα και $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, x_1)$

$h(x) > 0$ στο $(x_1, 1)$, άρα και $f''(x) > 0$ στο $(x_1, 1)$

Οπότε: η C_f παρουσιάζει ένα σημείο καμπής το $(x_1, f(x_1))$

$x_2 \in (1,+\infty)$

- για $1 < x < x_2 \overset{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_2) \Leftrightarrow h(x) > 0$
- για $x > x_2 \overset{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x) < 0$

$h(x) > 0$ στο $(1, x_2)$, άρα και $f''(x) > 0$ στο $(1, x_2)$

$h(x) < 0$ στο $(x_2, +\infty)$, άρα και $f''(x) < 0$ στο $(x_2, +\infty)$

Οπότε: η C_f παρουσιάζει ένα σημείο καμπής το $(x_2, f(x_2))$

Γ4. $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$

Έστω $\varphi(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x = f(x) - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Τότε : η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ως διαφορά συνεχών.

$\varphi(0) = f(0) - \sigma\upsilon\nu 0 \overset{f(0)=0}{=} 0 - 1 = -1 < 0$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, διότι $f \nearrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα για τα $0, \frac{\pi}{2} \in [0,+\infty)$

ισχύει $0 < \frac{\pi}{2} \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} 0 < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $\varphi(0)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Bolzano για την $\varphi(x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η $\varphi(x)=f(x)-\text{συν}x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ως διαφορά παραγωγισίμων, με: $\varphi'(x)=f'(x)+\text{ημ}x>0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

ως άθροισμα θετικών αφού από ερώτημα (Γ2):

$f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, άρα και στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και ημx >0 στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ συνεχής στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi'(x)>0 \text{ στο } \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi \nearrow \text{ στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ οπότε και 1-1.}$$

Τελικά η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

θέτω $x+t=u$ τότε dt=du και $t=u-x$

όταν $t_1=0$ τότε $u_1=x+0=x$

$t_2=-x$ τότε $u_2=x-x=0$

άρα η (1) γίνεται $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\dfrac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du\Leftrightarrow\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\int_0^x\dfrac{e^{2u}e^{-2x}}{g(u)}du\Leftrightarrow$

$\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{e^{2x}g(u)}du\Leftrightarrow\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\dfrac{1}{e^{2x}}\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow 1-f(x)=-\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$

$\Leftrightarrow f(x)=1+\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du\quad(1)$

$g(x)$ συνεχής και $g(x)\neq 0$ από υπόθεση άρα $\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα έχει αρχική την $\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$

Τότε η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως άθροισμα της σταθερής 1 και της $\int_0^x\dfrac{e^{2u}}{g(u)}du$.

Το $\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$ στη σχέση (iii) προκύπτει αν αντικατασταθεί στη σχέση (ii) η συνάρτηση g με την f που έχει τις ίδιες ιδιότητες.

Άρα ισχύουν τα ίδια για την συνάρτηση g δηλαδή $g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du \quad (2)$και είναι για τον ίδιο λόγο παραγωγίσιμη.

Η σχέση (1) ισχύει για x=0 οπότε $f(0)=1+\int_0^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow f(0)=1$

ομοίως η σχέση (2) για x=0 $\quad g(0)=1+\int_0^0\frac{e^{2u}}{f(u)}du \Leftrightarrow g(0)=1$

Παραγωγίζω τις σχέσεις (1) και (2) οπότε:

$$\bullet f'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x)=e^{2x} \quad (3)$$

$$\bullet g'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du\right)' \Leftrightarrow g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)f(x)=e^{2x} \quad (4)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3),(4):

$$f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \overset{g(x)\neq 0}{\Rightarrow} \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$$

άρα $\frac{f(x)}{g(x)}=c_1,\ \forall x\in\Re \Leftrightarrow f(x)=cg(x),\ \forall x\in\Re$

Για x=0: $f(0)=c_1g(0)\underset{f(0)=1}{\overset{g(0)=1}{\Rightarrow}} c=1$ Τότε $f(x)=g(x)$

Δ2.

Η σχέση $f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}$ γίνεται $f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x)=2e^{2x}$

$$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=\left(e^{2x}\right)' \Rightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_2,\ \forall x\in\Re$$

για x=0: $f^2(0)=e^0+c_2 \overset{f(0)=1}{\Rightarrow} 1^2=1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$

Τότε $f^2(x)=e^{2x}$.Όμως $f(x)>0$ άρα $f(x)=e^x$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln e^x=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}\underset{\substack{x\to 0^-\\u\to-\infty}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$

Έστω $h(x)=\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}},x\in(\alpha,0)$

Τότε: $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\underset{\substack{x\to 0^-\\w\to+\infty}}{\overset{\text{θέτω: } w=-\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{w\to+\infty}\dfrac{e^w}{-w}=\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{w\to+\infty}\left(e^w\right)=+\infty\\ \lim\limits_{w\to+\infty}\left(-w\right)=-\infty\end{array}\right)\overset{\text{D.L.H}}{=}\lim\limits_{w\to+\infty}\dfrac{\left(e^w\right)'}{\left(-w\right)'}=$

$\lim\limits_{w\to+\infty}\left(-e^w\right)=-\infty$

Δ4. $E(\Omega)=\int_0^1\left|F(x)\right|dx$

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

όμως $F(x)=\int_1^x f\left(t^2\right)dt=\int_1^x e^{t^2}dt=-\int_x^1 e^{t^2}dt$

ισχύει $e^{x^2}>0$ στο $[x,1]$ αφού $x\in[0,1]$

Οπότε από γνωστό θεώρημα $\int_x^1 e^{t^2}dt>0\Leftrightarrow-\int_x^1 e^{t^2}dt<0$

δηλαδή η $F(x)<0$ στο $[0,1]$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$F'(x)=\left(\int_1^x f\left(t^2\right)dt\right)'=f\left(x^2\right)=e^{x^2}>0$

Επιπλέον F συνεχής άρα $F\uparrow$ οπότε

$x<1\overset{F\uparrow}{\Rightarrow}F(x)<F(1)\Rightarrow F(x)<0$

διότι $F(1)=\int_1^1 F(t^2)dt=0 \quad (1)$

Ισχύει $F'(x)=\left(\int_1^x f(t^2)dt\right)'=f(x^2)=e^{x^2} \quad (2)$

άρα $E(\Omega)=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 (x)'F(x)dx=-\left[\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx\right]=$

$-\left[1F(1)-0F(0)\right]+\int_0^1 xe^{x^2}dx \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \int_0^1 xe^{x^2}dx$

Επομένως $E(\Omega)=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)'e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)'dx=$

$\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right)=\frac{1}{2}(e-1)$ τ.μ.